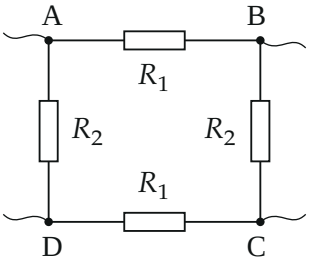
Мощность в цепи при разных подключениях источника

Задача 5. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 5] При подключении источника постоянного напряжения к точкам A и B электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, в цепи выделяется мощность $P_1 = 100$ Вт. При подключении того же источника постоянного напряжения к точкам B и C в цепи выделяется мощность $P_2 = 2P_1$.



1. Найдите отношение $\dfrac{R_2}{R_1}$.
2. Какая мощность P_3 будет выделяться в цепи при подключении того же источника постоянного напряжения к точкам A и C?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цепь — кольцо из четырёх резисторов. Подключив источник к двум точкам кольца, получаем две параллельные ветви между ними. Источник один и тот же, то есть напряжение U одно и то же, поэтому мощность $P = U^2/R_{\text{экв}}$ обратно пропорциональна эквивалентному сопротивлению. Отношение мощностей даёт уравнение на отношение сопротивлений.

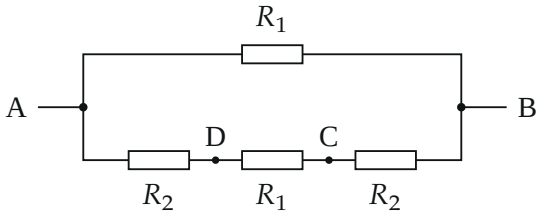
Обозначения. U — напряжение источника; R_{AB}, R_{BC}, R_{AC} — эквивалентные сопротивления цепи при подключении к соответствующим точкам; $x = R_2/R_1$.

1. Мощность при постоянном напряжении. Вся мощность, отданная источником, выделяется в резисторах: $P = UI = \dfrac{U^2}{R_{\text{экв}}}$. Тогда для

двух подключений

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} = 2.$$

2. Подключение к A и B. Между A и B две ветви: резистор R_1 и цепочка R_2 (A–D), R_1 (D–C), R_2 (C–B), соединённая последовательно.



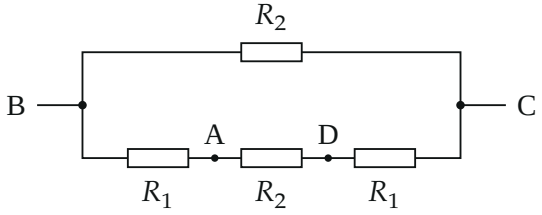
Подключение к A и B: ветвь R_1 параллельна цепочке $R_2 + R_1 + R_2$.

Проводимости параллельных ветвей складываются:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + 2R_2} = \frac{1}{R_1}\left(1 + \frac{1}{1+2x}\right) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{2(1+x)}{1+2x}.$$

3. Подключение к B и C. То же, но «одинокий» резистор теперь R_2, а цепочка — $R_1 + R_2 + R_1$:

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2 + 2R_1} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{2(1+x)}{x(x+2)}.$$



Подключение к B и C: ветвь R_2 параллельна цепочке $R_1 + R_2 + R_1$.

Пункт 1.

4. Уравнение на x. Подставим проводимости в отношение мощностей из шага 1, $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{1/R_{BC}}{1/R_{AB}} = 2$:

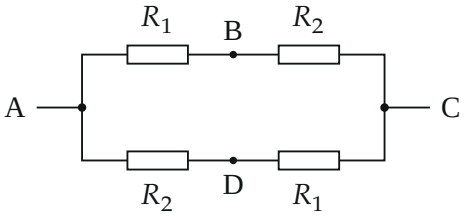
$$\frac{1+2x}{x(x+2)} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}37.$$

Второй корень отрицательный — сопротивление не может быть отрицательным.

Пункт 2.

5. Подключение к A и C. Теперь обе ветви одинаковые: A–B–C ($R_1 + R_2$) и A–D–C ($R_2 + R_1$):

$$R_{AC} = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{R_1(1+x)}{2}.$$



Подключение к A и C: две одинаковые ветви по $R_1 + R_2$.

6. Мощность. Снова $P = U^2/R$ при том же U, поэтому

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{R_{AB}}{R_{AC}} = \frac{R_1(1+2x)}{2(1+x)} \cdot \frac{2}{R_1(1+x)} = \frac{1+2x}{(1+x)^2}.$$

С $1 + 2x = \sqrt{3}$ и $1 + x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$:

$$P_3 = \frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2} P_1 = \frac{4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} P_1 \approx 0{,}93 P_1 \approx 93 \text{ Вт}.$$

Обратите внимание. Параллельно соединены не «соседние» резисторы, а две *ветви* между точками подключения; в каждой ветви резисторы последовательны. Нарисовать схему заново — самый надёжный способ это увидеть.

Ответ:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}37, \qquad P_3 = \frac{1+2x}{(1+x)^2} P_1 \approx 93 \text{ Вт}.$$

Проверка. Подстановка (python) при $R_1 = 1$, $R_2 = 0{,}366$: $R_{AB} = 0{,}634$, $R_{BC} = 0{,}317$ — ровно вдвое меньше, значит, $P_2 = 2P_1$ выполнено; $R_{AC} = 0{,}683$, $P_3 = 100 \cdot 0{,}634/0{,}683 = 92{,}8$ Вт. Разумно: R_{AC} больше R_{AB}, но ненамного, поэтому P_3 чуть меньше P_1. Предельный случай $x = 1$ (все резисторы равны) дал бы $P_2 = P_1$ — значит, условие $P_2 = 2P_1$ требует $R_2 < R_1$, как и получилось.

Смысл: при одном источнике мощности относятся обратно сопротивлениям, а сопротивления кольца находятся как две параллельные ветви.

Ответ. 1) $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}37$; 2) $P_3 = \dfrac{4\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} P_1 \approx 93$ Вт.