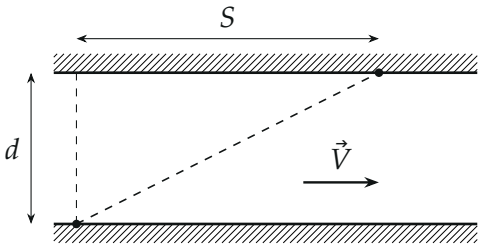
Сколько плыть через реку: снос и время

Задача 1. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 1] Пловец переплывает через реку шириной $d = 100$ м за время $\tau = 220$ с. За это время течение сносит его на $S = 200$ м. Скорость течения реки $V = 0{,}5$ м/с. Снос — это расстояние, на которое перемещается пловец вдоль реки к моменту достижения противоположного берега. В подвижной системе отсчёта, связанной с водой, пловец движется с постоянной скоростью.

1. Найдите скорость u пловца в подвижной системе отсчёта, связанной с водой.
2. За какое наименьшее время T пловец может пересечь реку?



Поясняющий рисунок: за время τ пловец пересекает реку и оказывается ниже по течению на S.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на сложение скоростей: скорость пловца относительно берега $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$. Все три скорости постоянны, поэтому пловец движется по прямой, и перемещение за время τ раскладывается на два независимых движения — поперёк и вдоль реки. Течение участвует только во втором. Поэтому разложим $\vec{u}$ на составляющие вдоль осей и найдём каждую из своего перемещения.

Обозначения. Ось x — вдоль берега по течению, ось y — поперёк реки. $\vec{u}$ — скорость пловца относительно воды, u_x, u_y — её проекции; $\vec{V}$ — скорость течения; $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ — скорость относительно берега.

Пункт 1.

1. Закон сложения скоростей в проекциях. Вектор $\vec{V}$ направлен по оси x, поэтому

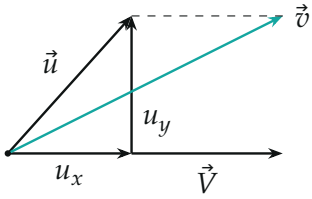
$$v_x = u_x + V, \qquad v_y = u_y.$$

2. Перемещения за время τ. Движение равномерное, перемещение по каждой оси равно проекции скорости, умноженной на время:

$$y: \quad u_y\tau = d \quad \Rightarrow \quad u_y = \frac{d}{\tau} = \frac{100}{220} \approx 0{,}455 \text{ м/с};$$

$$x: \quad (u_x + V)\tau = S \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{S}{\tau} - V = \frac{200}{220} - 0{,}5 \approx 0{,}409 \text{ м/с}.$$

Знак плюс у u_x значит, что пловец сам плыл немного по течению: одно течение снесло бы его только на $V\tau = 110$ м.



Скорости в масштабе (4 см на 1 м/с): $\vec{u}$ относительно воды, её проекции u_x и u_y, течение $\vec{V}$ и итоговая $\vec{v}$ — она направлена в точку выхода на берег.

3. Модуль скорости относительно воды — по теореме Пифагора:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{\tau} - V\right)^2 + \left(\frac{d}{\tau}\right)^2} = \frac{\sqrt{90^2 + 100^2}}{220} \text{ м/с} \approx 0{,}61 \text{ м/с}.$$

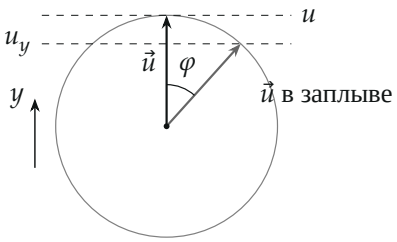
Пункт 2.

4. Время переправы и направление $\vec{u}$. Время переправы зависит только от $v_y = u_y$:

$$t = \frac{d}{u_y} = \frac{d}{u\cos\varphi},$$

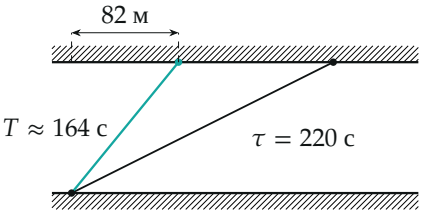
где φ — угол между $\vec{u}$ и перпендикуляром к берегу. Модуль u задан (пловец плывёт с той же скоростью относительно воды), а $\cos\varphi \le 1$. Наименьшее время — при $\varphi = 0$, когда $\vec{u}$ направлена поперёк реки:

$$T = \frac{d}{u} = \frac{100}{0{,}6115} \approx 164 \text{ с}.$$



Конец вектора $\vec{u}$ данной длины лежит на окружности. Поперечная составляющая u_y наибольшая, когда $\vec{u}$ направлена прямо поперёк реки.

5. Как выглядит самый быстрый заплыв. Тогда вдоль реки пловца несёт только течение, и снос равен $VT \approx 82$ м — меньше прежних 200 м.



Два заплыва в масштабе: чёрный — заплыв из условия, бирюзовый — самый быстрый.

Обратите внимание. Самый быстрый заплыв — поперёк *воды*, а не поперёк берега: скорость течения на время переправы не влияет вовсе.

Ответ:

$$u = \sqrt{\left(\frac{S}{\tau} - V\right)^2 + \left(\frac{d}{\tau}\right)^2} \approx 0{,}61 \text{ м/с}, \qquad T = \frac{d}{u} \approx 164 \text{ с}.$$

Проверка. Размерности: м/с и с. Если бы течения не было ($V = 0$), то $u = \sqrt{S^2 + d^2}/\tau$ — просто длина пути по прямой, делённая на время; так и должно быть. Ещё проверка: $T < \tau$, как и положено наименьшему времени ($164 < 220$).

Смысл: из перемещения находим скорость относительно берега, вычитаем течение — получаем скорость относительно воды.

Ответ. 1) $u = \sqrt{\left(\frac{S}{\tau} - V\right)^2 + \left(\frac{d}{\tau}\right)^2} \approx 0{,}61$ м/с; 2) $T = \frac{d}{u} \approx 164$ с.