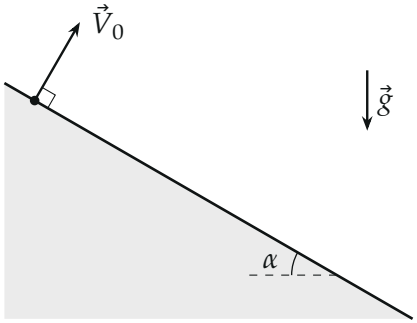
Мяч, брошенный перпендикулярно склону

Задача 2. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 2] На плоском склоне с уклоном $\alpha = 30°$ бросают мяч с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с перпендикулярно склону. Точка старта находится на поверхности склона. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Через какое время T мяч упадёт на склон первый раз?
2. На каком расстоянии S_1 от точки старта мяч упадёт на склон первый раз?
3. На каком расстоянии S_2 от точки старта мяч упадёт на склон во второй раз после упругого соударения с поверхностью склона?



Поясняющий рисунок: мяч брошен со склона перпендикулярно его поверхности.

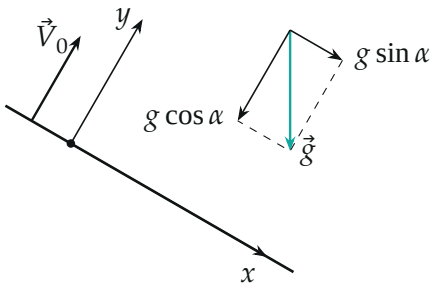
▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Склон — прямая, и удобно взять оси вдоль склона и по нормали к нему: момент падения на склон — это просто $y = 0$, а расстояние от точки старта — координата x. В этих осях оба движения равноускоренные, но ускорения разные. Упругий удар меняет знак только нормальной проекции скорости; вдоль склона мяч продолжает разгоняться как ни в чём не бывало.

Обозначения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону вверх, начало — точка старта. T — время полёта до первого удара, S_1, S_2 — расстояния вдоль склона до первого и второго ударов.

1. Проекции ускорения и начальной скорости. Вектор $\vec{g}$ вертикален и образует с нормалью к склону угол α:

$$a_x = g\sin\alpha = 5\ \text{м/с}^2, \qquad a_y = -g\cos\alpha = -5\sqrt{3}\ \text{м/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_0$ направлена по нормали: $V_{0x} = 0$, $V_{0y} = V_0$.



Оси вдоль склона и по нормали; бирюзовое $\vec{g}$ раскладывается на $g\sin\alpha$ вдоль склона и $g\cos\alpha$ к склону.

Пункт 1.

2. Время полёта. Закон движения вдоль y — как у тела, брошенного вверх с ускорением $g\cos\alpha$:

$$y(t) = V_0 t - \frac{g\cos\alpha\, t^2}{2} = 0,$$

$$T = \frac{2V_0}{g\cos\alpha} = \frac{2\cdot 10}{10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3\ \text{с}.$$

Пункт 2.

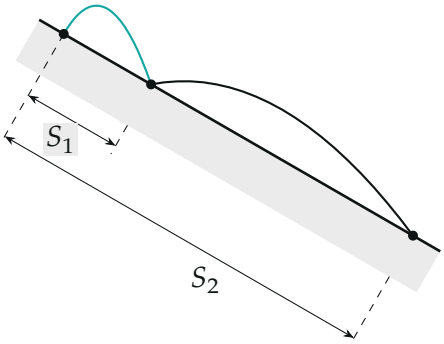
3. Расстояние до первого удара. Вдоль x мяч стартует с нулевой проекцией скорости и разгоняется с ускорением $g\sin\alpha$:

$$S_1 = x(T) = \frac{g\sin\alpha\, T^2}{2} = \frac{2V_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha},$$

$$S_1 = \frac{2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}}{10 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{40}{3} \approx 13{,}3 \text{ м}.$$

Пункт 3.

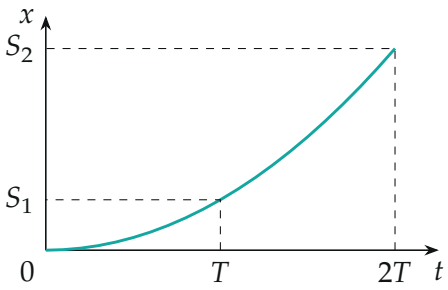
4. Что меняет упругий удар. В момент удара $V_y = V_0 - g\cos\alpha\, T = -V_0$, а $V_x = g\sin\alpha\, T$. Удар упругий, склон считаем гладким: ударная сила направлена по нормали к склону, поэтому меняется только V_y: она становится $+V_0$, а V_x не меняется. Значит, вдоль y всё повторяется — снова полёт длительностью T, а вдоль x мяч продолжает то же равноускоренное движение, будто удара и не было.



Траектория в масштабе: бирюзовая — до первого удара, чёрная — после него. Высота дуг одинакова, а вторая дуга втрое длиннее первой.

5. Расстояние до второго удара. Второй удар — в момент $2T$. Координата x всё время растёт по одному закону $x = \dfrac{g\sin\alpha\, t^2}{2}$:

$$S_2 = x(2T) = \frac{g\sin\alpha\,(2T)^2}{2} = 4S_1 = \frac{160}{3} \approx 53{,}3 \text{ м}.$$



Координата вдоль склона $x(t)$ — одна парабола и до удара, и после: время вдвое больше — путь вчетверо больше.

Обратите внимание. Вдоль склона мяч не «начинает заново» после удара: к первому удару он уже имеет скорость $g\sin\alpha\, T$ вдоль склона, поэтому второй прыжок длиннее первого втрое, а не равен ему.

Ответ:

$$T = \frac{2V_0}{g\cos\alpha} \approx 2{,}3 \text{ с},$$

$$S_1 = \frac{2V_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = \frac{40}{3} \text{ м}, \qquad S_2 = 4S_1 = \frac{160}{3} \text{ м}.$$

Проверка. Размерности: $\frac{\text{м/с}}{\text{м/с}^2} = \text{с}$, $\frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}$. Предел $\alpha \to 0$: $T \to 2V_0/g$, $S_1 \to 0$ — бросок вертикально вверх с горизонтальной площадки, мяч падает в ту же точку. Второй способ для S_1 в лабораторных осях: горизонтальная скорость $V_0\sin\alpha = 5$ м/с постоянна, за T мяч смещается по горизонтали на $5 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 11{,}55$ м, а вдоль склона это $11{,}55/\cos\alpha = 13{,}3$ м — то же.

Смысл: оси по склону превращают удар о склон в простое отражение одной проекции скорости.

Ответ. 1) $T = \frac{2V_0}{g\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$ с; 2) $S_1 = \frac{2V_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = \frac{40}{3} \approx 13{,}3$ м; 3) $S_2 = 4S_1 = \frac{160}{3} \approx 53{,}3$ м.