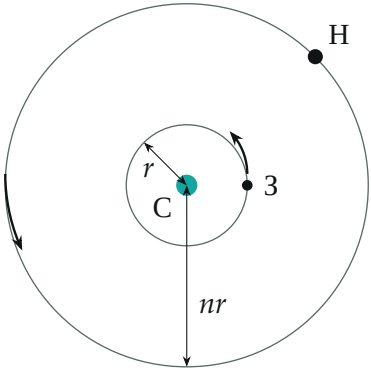
Планеты: год на Нептуне и противостояния

Задача 3. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 3] Некоторые планеты (Венера, Земля, Нептун) движутся вокруг Солнца по орбитам «близким» к круговым. Радиус орбиты Нептуна в $n = 30$ раз больше радиуса земной орбиты. Планеты движутся по орбитам в одной плоскости и в одном и том же направлении.

1. Вычислите продолжительность $T_\text{Н}$ года на Нептуне. Продолжительность земного года $T_\text{З} = 365$ суток.
2. Через какой наименьший промежуток времени τ расстояние между Землёй и Нептуном достигает наибольшего значения?



Поясняющий рисунок (не в масштабе): Солнце С, Земля З и Нептун Н на круговых орбитах; обе планеты обходят Солнце в одну сторону.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача о движении по окружности под действием тяготения Солнца. Пункт 1 — третий закон Кеплера: его выведем из второго закона Ньютона для планеты на круговой орбите. Пункт 2 — задача на «обгон по кругу»: Земля обходит Солнце быстрее Нептуна, и расстояние между планетами повторяется, когда Земля «обгоняет» Нептун ровно на один оборот. Удобно перейти к углу между направлениями на планеты.

Обозначения. M — масса Солнца, m — масса планеты, r — радиус земной орбиты, nr — радиус орбиты Нептуна, $\omega_\text{З} = 2\pi/T_\text{З}$ и $\omega_\text{Н} =$

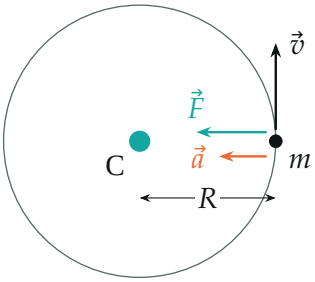
$2\pi/T_\text{Н}$ — угловые скорости планет, φ — угол между лучами «Солнце–Земля» и «Солнце–Нептун», d — расстояние между планетами.

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для планеты. Единственная сила — притяжение Солнца $\vec{F}$, направленное к центру орбиты. Ускорение планеты на круговой орбите — центростремительное, $a = \omega^2 R$, тоже к центру. Проекция второго закона Ньютона на ось, направленную от планеты к Солнцу:

$$m\omega^2 R = G\frac{Mm}{R^2}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \;\Rightarrow\; \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Правая часть одинакова для всех планет: масса планеты сократилась.



Планета на круговой орбите: сила тяготения $\vec{F}$ и ускорение $\vec{a}$ направлены к Солнцу, скорость $\vec{v}$ — по касательной.

2. Год на Нептуне. Отношение R^3/T^2 одно и то же для Земли и Нептуна (третий закон Кеплера):

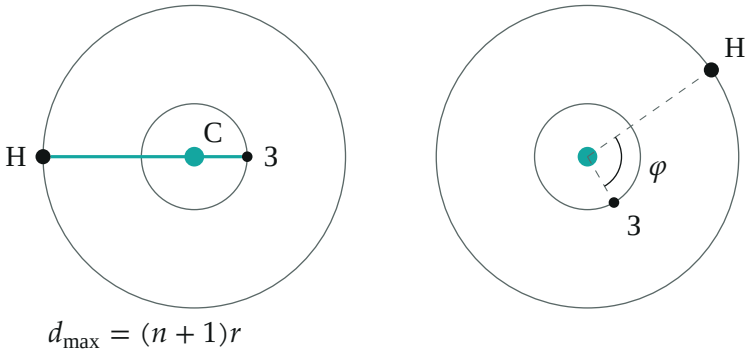
$$\frac{r^3}{T_3^2} = \frac{(nr)^3}{T_\text{Н}^2} \;\Rightarrow\; T_\text{Н} = T_3\, n^{3/2} = 365\cdot 30^{3/2}\ \text{сут} \approx 6{,}0\cdot 10^4\ \text{сут} \approx 164\ \text{года}.$$

Пункт 2.

3. Когда расстояние наибольшее. По теореме косинусов для треугольника «Солнце–Земля–Нептун»

$$d^2 = r^2 + n^2 r^2 - 2nr^2\cos\varphi.$$

d растёт вместе с $-\cos\varphi$ и наибольшее при $\varphi = \pi$: планеты по разные стороны от Солнца на одной прямой с ним, $d_{\max} = (n+1)r$.

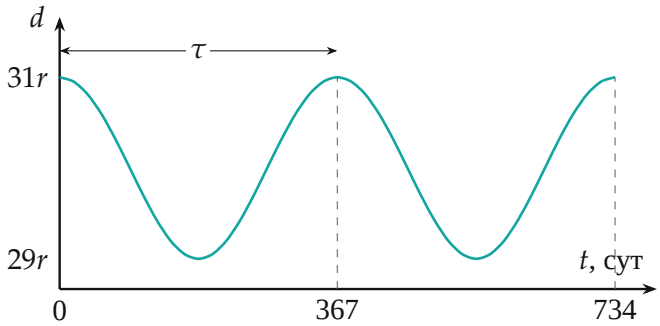


Слева — наибольшее расстояние: планеты по разные стороны от Солнца. Справа — угол φ между направлениями на планеты.

4. Как меняется угол. За время t Земля поворачивается на угол $\omega_З t$, Нептун — на $\omega_Н t$, в ту же сторону. Угол между ними меняется со скоростью $\omega_З - \omega_Н$: это угловая скорость Земли в системе отсчёта, вращающейся вместе с лучом «Солнце–Нептун». От одного положения $\varphi = \pi$ до следующего угол должен вырасти на полный оборот:

$$(\omega_З - \omega_Н)\tau = 2\pi \;\Rightarrow\; \frac{\tau}{T_З} - \frac{\tau}{T_Н} = 1 \;\Rightarrow\; \tau = \frac{T_З T_Н}{T_Н - T_З} = \frac{T_З}{1 - n^{-3/2}}.$$

Числа: $n^{-3/2} = 30^{-3/2} \approx 6{,}09 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 365/(1 - 0{,}00609) \approx 367$ сут.



Расстояние между Землёй и Нептуном по вычисленным точкам (ось d начинается с $29r$): наибольшие значения повторяются через $\tau \approx 367$ сут.

Обратите внимание. За 365 сут Земля возвращается в ту же точку орбиты, но Нептун за это время уходит вперёд на угол $2\pi T_3/T_\text{Н} \approx 2{,}2°$; Земле нужно ещё около двух суток, чтобы его догнать. Поэтому τ чуть больше земного года.

Ответ (матрёшкой). $T_\text{Н} = T_3 n^{3/2}$, $\tau = \dfrac{T_3}{1 - n^{-3/2}}$.

Проверка. Размерности: n безразмерно, обе величины — в сутках. Предел $n \to \infty$ (Нептун неподвижен): $\tau \to T_3$ — Земля просто обходит круг. Предел $n \to 1$: планеты на одной орбите движутся вместе, $\tau \to \infty$ — расстояние не меняется. Обе формулы ведут себя верно.

Смысл: далёкая планета почти стоит на месте, поэтому противостояния с ней повторяются чуть реже раза в год.

Ответ. 1) $T_\text{Н} = T_3 n^{3/2} \approx 6{,}0 \cdot 10^4$ сут $\approx$ 164 года; 2) $\tau = \dfrac{T_3 T_\text{Н}}{T_\text{Н} - T_3} \approx$ 367 сут.