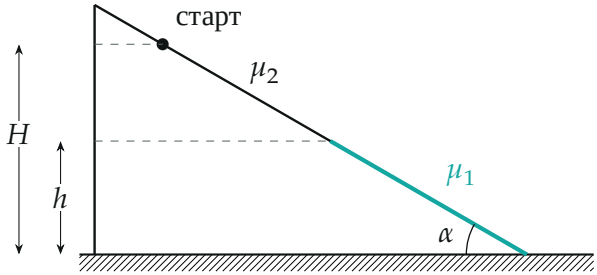
Лыжник на склоне с двумя коэффициентами трения

Задача 4. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 4] На заснеженном склоне с углом наклона α к горизонту коэффициент трения скольжения лыжника на высотах меньших h равен μ_1 ($\mu_1 > \operatorname{tg}\alpha$), на больших высотах коэффициент трения скольжения лыжника равен μ_2 ($\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha$). Ускорение свободного падения g.

1. С какой высоты H следует стартовать лыжнику с нулевой начальной скоростью, чтобы доехать до основания склона с нулевой конечной скоростью?
2. Найдите максимальную скорость V_{MAX} лыжника.
3. Найдите продолжительность T движения на участке торможения.



Поясняющий рисунок: выше уровня h склон «скользкий» (μ_2), ниже — «вязкий» (μ_1, выделен цветом).

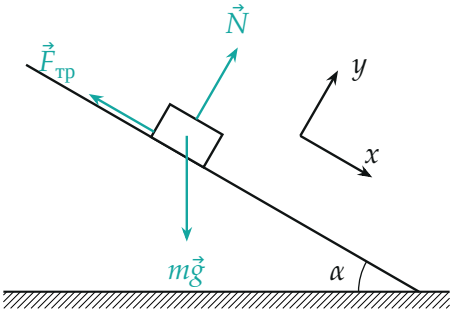
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о движении тела по наклонной плоскости с трением. На каждом участке силы постоянны, значит, движение равноускоренное. Наверху $\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha$: скатывающая сила больше трения, лыжник разгоняется. Внизу $\mu_1 > \operatorname{tg}\alpha$: трение больше, лыжник тормозит. Скорость наибольшая на границе участков, на высоте h. Ускорения найдём из второго закона Ньютона, дальше — формулы равноускоренного движения без времени.

Обозначения. m — масса лыжника; ось x направлена вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону; a_2 и a_1 — проекции ускорения

на ось x на верхнем и нижнем участках; $L_2 = \dfrac{H-h}{\sin\alpha}$ и $L_1 = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ — длины участков вдоль склона.

1. Второй закон Ньютона для лыжника. На лыжника действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная против скорости, то есть вверх по склону:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Силы, действующие на лыжника, и оси: x — вниз вдоль склона, y — перпендикулярно ему.

В проекции на ось y ускорения нет: $N - mg\cos\alpha = 0$, $N = mg\cos\alpha$, и $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. В проекции на ось x:

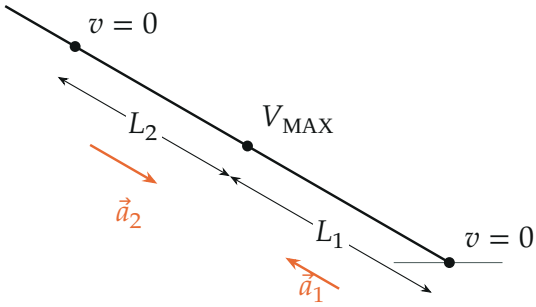
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \;\Rightarrow\; a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Наверху $a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) > 0$ — разгон; внизу $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) < 0$ — торможение, модуль $|a_1| = g(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)$.

2. Связь скорости и пути на каждом участке. Для равноускоренного движения $v_{\text{кон}}^2 - v_{\text{нач}}^2 = 2a_xL$. Наверху скорость растёт от нуля до V_{MAX}, внизу падает от V_{MAX} до нуля:

$$V_{\text{MAX}}^2 = 2a_2L_2 = 2g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\frac{H-h}{\sin\alpha},$$

$$0 - V_{\text{MAX}}^2 = 2a_1L_1 = -2g(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}.$$



Два участка: на L_2 ускорение по движению (разгон), на L_1 — против движения (торможение).

Пункт 1.

3. Высота старта. Приравниваем два выражения для V_{MAX}^2 (множитель $2g/\sin\alpha$ сокращается):

$$(\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha)(H-h)=(\mu_1\cos\alpha-\sin\alpha)h \;\Rightarrow\; H=\frac{(\mu_1-\mu_2)\cos\alpha}{\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha}\,h.$$

Второй способ (энергия). Работа сил трения за весь спуск равна $-(\mu_2 mg\cos\alpha L_2+\mu_1 mg\cos\alpha L_1)$, кинетическая энергия в начале и в конце нулевая, значит, $mgH=\mu_2 mg\cos\alpha\dfrac{H-h}{\sin\alpha}+\mu_1 mg\cos\alpha\dfrac{h}{\sin\alpha}$. Отсюда $H(\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha)=h(\mu_1-\mu_2)\cos\alpha$ — то же самое.

Пункт 2.

4. Наибольшая скорость. Она на высоте h, и проще взять нижний участок:

$$V_{\text{MAX}}=\sqrt{\frac{2gh(\mu_1\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha}}.$$

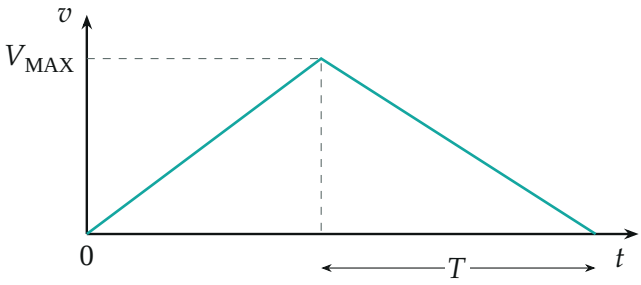
Пункт 3.

5. Время торможения. Скорость убывает линейно от V_{MAX} до нуля с ускорением $|a_1|$:

$$T=\frac{V_{\text{MAX}}}{|a_1|}=\frac{1}{g(\mu_1\cos\alpha-\sin\alpha)}\sqrt{\frac{2gh(\mu_1\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha}},$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha\,(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)}}.$$

Иначе: путь L_1 при равнозамедленном движении до остановки равен $V_{\text{MAX}}T/2$, $T = 2L_1/V_{\text{MAX}}$ — результат тот же.



Скорость лыжника от времени (построено для $\alpha = 30°$, $\mu_2 = 0{,}2$, $\mu_1 = 0{,}9$): линейный разгон, затем линейное торможение за время T.

Обратите внимание. Условия $\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha < \mu_1$ необходимы: при $\mu_2 > \operatorname{tg}\alpha$ лыжник не тронулся бы с места, при $\mu_1 < \operatorname{tg}\alpha$ не остановился бы внизу. В ответе это видно: знаменатель H и подкоренные выражения положительны именно при этих условиях.

Ответ (матрёшкой). $|a_1| = g(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)$, $V_{\text{MAX}} = \sqrt{2|a_1|h/\sin\alpha}$, $T = V_{\text{MAX}}/|a_1|$, $H = h\,\dfrac{(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha}$.

Проверка. Размерности: H — как h; $\sqrt{gh}$ — скорость; $\sqrt{h/g}$ — время. Предел $\mu_1 \to \operatorname{tg}\alpha$: внизу трение лишь уравновешивает скатывание, $|a_1| \to 0$, тогда $H - h \to 0$, $V_{\text{MAX}} \to 0$, $T \to \infty$ — лыжник должен стартовать с высоты h и ползёт бесконечно медленно. Предел верный.

Смысл: трение «съедает» на нижнем участке ровно ту скорость, которую лыжник набрал на верхнем.

Ответ. 1) $H = \dfrac{(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha}\,h$; 2) $V_{\text{MAX}} = \sqrt{\dfrac{2gh(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha}}$; 3) $T = \sqrt{\dfrac{2h}{g\sin\alpha\,(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)}}$.