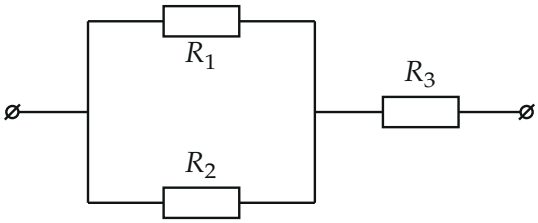
Мощности на резисторах и сборка из них цепи

Задача 5. [Физтех 2018/19, 9 класс, задача 5] На сопротивлениях R_1, R_2, R_3 при подаче на каждое из них одного и того же напряжения выделяются мощности P, $P/2$, $P/3$ соответственно.

1. Какая мощность P_1 будет выделяться при подаче того же напряжения на параллельно соединённые сопротивления R_1 и R_2?
2. Какая мощность P_2 будет выделяться при подаче того же напряжения на цепь, в которой эти сопротивления соединены по схеме, приведённой на рисунке?

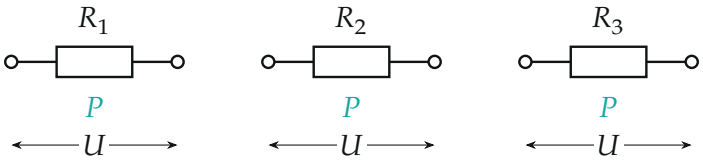


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Джоуля–Ленца и эквивалентное сопротивление. Напряжение U на входе одно и то же во всех опытах, поэтому мощность удобно считать по формуле $P = U^2/R$: чем меньше сопротивление цепи, тем больше мощность. Сначала из данных условия выразим каждое сопротивление через U^2/P, затем найдём эквивалентное сопротивление каждого соединения.

Обозначения. U — напряжение на входе; $r = U^2/P$ — удобная единица сопротивления; R_{12} — сопротивление параллельно соединённых R_1 и R_2, $R_{\text{экв}}$ — сопротивление всей цепи с рисунка.

1. Сопротивления из условия. Мощность на резисторе, к которому приложено напряжение U: $P = UI = U^2/R$ (закон Ома $I = U/R$). Отсюда $R = U^2/P$:

$$R_1 = \frac{U^2}{P} = r, \qquad R_2 = \frac{U^2}{P/2} = 2r, \qquad R_3 = \frac{U^2}{P/3} = 3r.$$



Опыт из условия: одно и то же напряжение U на каждом резисторе по отдельности и мощность, которая на нём выделяется.

Пункт 1.

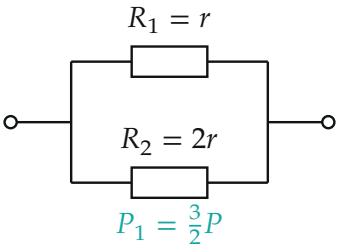
2. Параллельное соединение R_1 и R_2. На обоих одно напряжение U, токи складываются, поэтому складываются обратные сопротивления:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} = \frac{3}{2r} \;\Rightarrow\; R_{12} = \frac{2}{3}r.$$

Мощность цепи:

$$P_1 = \frac{U^2}{R_{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U^2}{r} = \frac{3}{2}P.$$

Второй способ. На каждом резисторе по-прежнему напряжение U, поэтому каждый выделяет ту же мощность, что в опыте условия: $P_1 = P + P/2 = \frac{3}{2}P$.

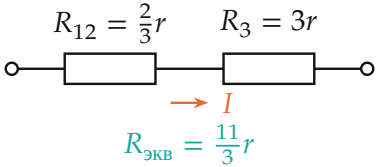


Пункт 1: R_1 и R_2 параллельно под напряжением U.

Пункт 2.

3. Цепь с рисунка. В ней блок R_{12} (параллельные R_1 и R_2) соединён последовательно с R_3: через них идёт один ток, сопротивления складываются:

$$R_{\text{экв}} = R_{12} + R_3 = \frac{2}{3}r + 3r = \frac{11}{3}r.$$



Эквивалентная схема цепи с рисунка: блок R_{12} и R_3 последовательно, ток I общий.

Мощность всей цепи:

$$P_2 = \frac{U^2}{R_{экв}} = \frac{3}{11} \cdot \frac{U^2}{r} = \frac{3}{11} P.$$

Проверка через ток. $I = \dfrac{U}{11r/3} = \dfrac{3U}{11r}$. На R_3 выделяется $I^2 \cdot 3r = \dfrac{27}{121}P$, на блоке R_{12} — $I^2 \cdot \frac{2}{3}r = \dfrac{6}{121}P$. Сумма $\dfrac{33}{121}P = \dfrac{3}{11}P$ — сходится.

Обратите внимание. Мощности складываются только тогда, когда на каждом резисторе остаётся то же напряжение U, что и в опыте условия (пункт 1). В пункте 2 напряжение делится между R_{12} и R_3, и сумма $P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3}$ была бы ошибкой.

Ответ (матрёшкой). При $R_k = kU^2/P$

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1R_2/(R_1+R_2)}, \qquad P_2 = \frac{U^2}{R_1R_2/(R_1+R_2)+R_3}.$$

Проверка. Размерности: U^2/r — мощность. Знак и порядок: параллельное подключение уменьшает сопротивление, и $P_1 > P$; добавление последовательного R_3 увеличивает сопротивление больше чем втрое, и $P_2 < P/3$ — меньше, чем на одном R_3. Всё согласуется.

Смысл: при одном и том же напряжении мощность обратно пропорциональна сопротивлению цепи.

Ответ. 1) $P_1 = \dfrac{3}{2}P$; 2) $P_2 = \dfrac{3}{11}P$.