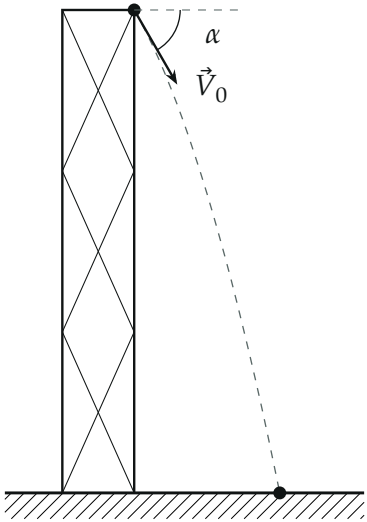
Бросок с вышки под углом

Задача 1. [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 1] Камень бросают с вышки со скоростью $V_0 = 8$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. В полёте камень всё время приближался к горизонтальной поверхности Земли и упал на неё со скоростью $2{,}5V_0$.

1. Найдите вертикальную компоненту скорости камня при падении на Землю.
2. Найдите время полёта камня.
3. Найдите горизонтальное смещение камня за время полёта.

Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.



Поясняющий рисунок: камень всё время приближается к Земле, значит, его бросили под углом α вниз *от горизонта. Траектория построена по вычисленным точкам.*

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту. Слова «всё время приближался к Земле» — ключ к условию: если бросить камень вверх, он сначала поднимался бы

и удалялся от Земли. Значит, камень брошен под углом 60° *вниз* от горизонтали. В полёте на камень действует только сила тяжести, поэтому горизонтальная составляющая скорости постоянна, а вертикальная равномерно растёт. Конечную скорость мы знаем по модулю — по ней и горизонтальной составляющей найдём вертикальную, а дальше время и смещение.

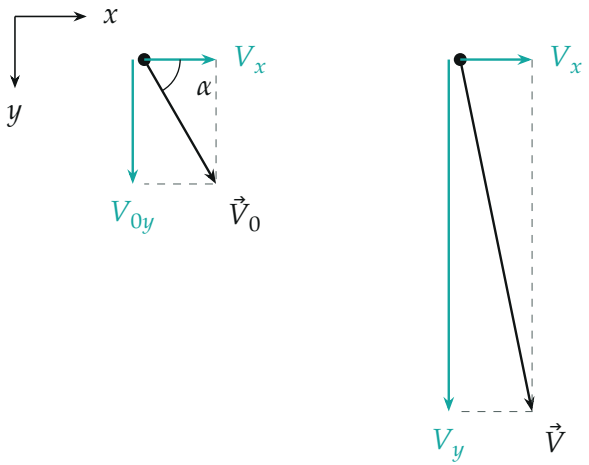
Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вертикально *вниз* (так все проекции скорости положительны); V_x — горизонтальная составляющая скорости, V_{0y} и V_y — вертикальные в начале и при падении; τ — время полёта, L — горизонтальное смещение.

Пункт 1.

1. Проекции начальной скорости. Разложим $\vec{V}_0$ по осям:

$$V_x = V_0 \cos\alpha = 4 \text{ м/с}, \qquad V_{0y} = V_0 \sin\alpha = 4\sqrt{3} \text{ м/с} \approx 6{,}93 \text{ м/с}.$$

2. Горизонтальная составляющая сохраняется. Второй закон Ньютона для камня $m\vec{a} = m\vec{g}$ в проекции на ось x: $a_x = 0$, поэтому V_x при падении та же, 4 м/с.

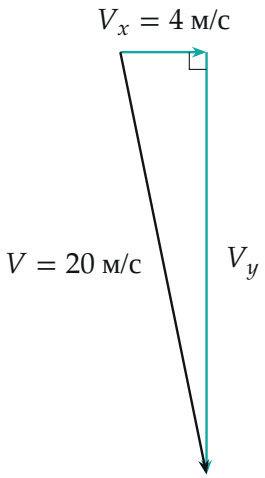


Скорость в момент броска (слева) и при падении (справа), в одном масштабе. Горизонтальная проекция V_x не меняется, вертикальная растёт с 6,9 до 19,6 м/с.

3. Вертикальная составляющая при падении. Модуль конечной скорости $V = 2{,}5V_0 = 20$ м/с, и по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника скоростей

$$V_y = \sqrt{V^2 - V_x^2} = V_0\sqrt{6{,}25 - \cos^2\alpha} = V_0\sqrt{6} = 8\sqrt{6}\text{ м/с} \approx 19{,}6\text{ м/с}.$$

Скорость при падении направлена вниз.



Треугольник скоростей при падении: гипотенуза $V = 2{,}5V_0$, катет V_x известен, второй катет — искомая V_y.

Пункт 2.

4. Время полёта. Второй закон Ньютона в проекции на ось y (вниз): $a_y = g$. Вертикальная скорость растёт равномерно: $V_y = V_{0y} + g\tau$. Отсюда

$$\tau = \frac{V_y - V_{0y}}{g} = \frac{V_0\left(\sqrt{6} - \sin\alpha\right)}{g} = \frac{19{,}60 - 6{,}93}{10}\text{ с} \approx 1{,}27\text{ с}.$$

Пункт 3.

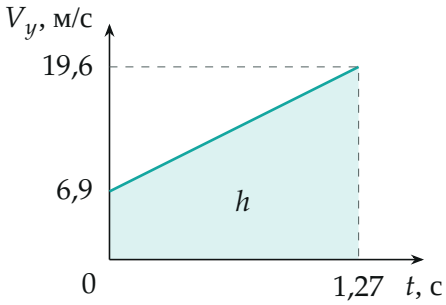
5. Горизонтальное смещение. По горизонтали камень летит равно-

мерно со скоростью V_x:

$$L = V_x\tau = \frac{V_0^2 \cos\alpha \left(\sqrt{6} - \sin\alpha\right)}{g} = 4 \cdot 1{,}267 \text{ м} \approx 5{,}1 \text{ м}.$$

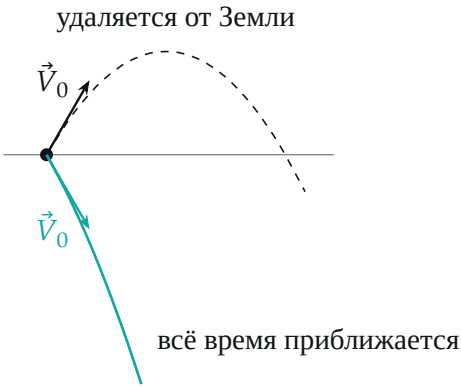
6. Высота вышки (для проверки). Площадь под графиком $V_y(t)$ — путь по вертикали, то есть высота вышки:

$$h = \frac{V_{0y} + V_y}{2}\,\tau = \frac{V_y^2 - V_{0y}^2}{2g} = \frac{384 - 48}{20} \text{ м} = 16{,}8 \text{ м}.$$



Вертикальная скорость растёт линейно с наклоном g; площадь под графиком (бирюзовая трапеция) равна высоте вышки.

7. Почему именно вниз. Если бы камень бросили на 60° вверх, его вертикальная скорость первые 0,69 с была бы направлена вверх, и камень удалялся бы от Земли — это противоречит условию.



Два варианта броска под 60° с одной высоты (масштаб по x и y одинаковый). Условию подходит только бросок вниз (бирюзовый).

Обратите внимание. Угол 60° «к горизонту» здесь отсчитан вниз. Если взять бросок вверх, получится $\tau = V_0(\sqrt{6} + \sin\alpha)/g \approx 2{,}65$ с и $L \approx 10{,}6$ м — это ответ на другую задачу.

Проверка. Размерности: V_0/g — секунды, V_0^2/g — метры. Второй способ для пункта 1 — закон сохранения энергии: $\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + mgh$ даёт $h = \frac{(6{,}25-1)V_0^2}{2g} = 16{,}8$ м — то же, что в шаге 6. Смысл: горизонтальная скорость мала (4 м/с), поэтому почти вся конечная скорость — вертикальная.

Ответ. 1) $V_y = V_0\sqrt{6{,}25 - \cos^2\alpha} = V_0\sqrt{6} \approx 19{,}6$ м/с (вниз); 2) $\tau = \frac{V_0(\sqrt{6} - \sin\alpha)}{g} \approx 1{,}27$ с; 3) $L = V_0\cos\alpha \cdot \tau \approx 5{,}1$ м.