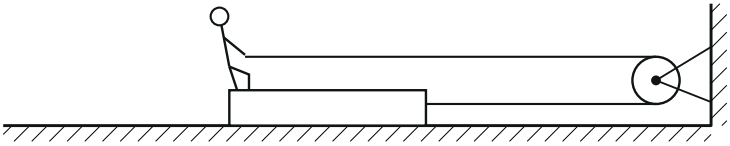
Человек с канатом тянет ящик

Задача 2. [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 2] Человеку, упирающемуся в ящик ногами, надо передвинуть ящик из состояния покоя по горизонтальному полу на расстояние S к стене (см. рис.). Массы человека и ящика равны соответственно m и $M = 5m$. Натянутые части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массами каната, блока и трением в оси блока можно пренебречь. Коэффициент трения между ящиком и полом μ.



1. С какой силой ящик с человеком давят на пол при движении ящика?
2. С какой минимальной постоянной силой F_0 надо тянуть человеку канат, чтобы осуществить задуманное?
3. Какой скорости достигнет ящик, если человек осуществит задуманное, приложив постоянную силу F ($F > F_0$) к канату?

▲ **Решение. Что происходит.** Человек тянет канат с силой F; канат невесомый, блок лёгкий и без трения в оси, поэтому натяжение одинаково во всём канате и равно F. Канат тянет систему «ящик + человек» к стене *дважды*: верхним концом — за руки человека, нижним — за ящик. Если рассматривать человека и ящик как одно тело, силы между ними (давление ног, трение подошв) внутренние и в уравнение не войдут. Это задача на второй закон Ньютона для системы тел и трение покоя: сначала проверим, сдвинется ли ящик, потом найдём ускорение и скорость.

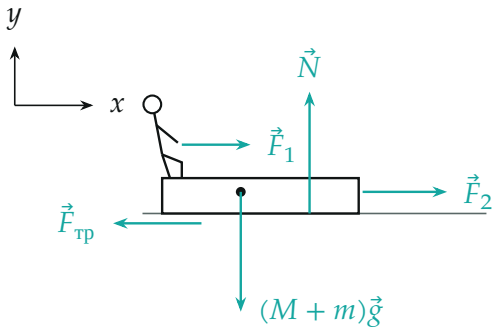
Обозначения. Ось x — горизонтально к стене, ось y — вертикально вверх; N — сила нормальной реакции пола; $F_{\text{тр}}$ — сила трения пола о ящик; a — ускорение системы; v — скорость ящика после пути S.

Пункт 1.

1. Силы на систему «ящик + человек». Внешние силы: сила тяжести $(M+m)\vec{g}$, сила реакции пола $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (против движения,

от стены) и две силы натяжения каната, каждая F, направленные к стене. Второй закон Ньютона для системы

$$(M+m)\vec{a} = (M+m)\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$



Внешние силы на систему «ящик + человек». Канат тянет её к стене дважды: за руки ($\vec{F}_1$) и за ящик ($\vec{F}_2$), $F_1 = F_2 = F$.

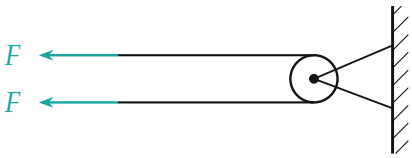
2. Давление на пол. В проекции на ось y: ящик по вертикали не движется ($a_y = 0$), а силы каната горизонтальны:

$$0 = N - (M+m)g \quad \Rightarrow \quad N = (M+m)g = 6mg.$$

По третьему закону Ньютона ящик с человеком давят на пол с силой $6mg$, направленной вниз.

Пункт 2.

3. Натяжение каната. Канат и блок невесомы, трения в оси нет. Второй закон Ньютона для невесомого куска каната: сумма сил на него равна нулю, значит, натяжение вдоль всего каната одно и то же — F, сила, с которой тянет человек.



Канат вокруг блока: натяжение обеих ветвей F (на ящик и человека канат действует силами к стене). Когда ящик проходит S, каждая ветвь укорачивается на S, и человек выбирает $2S$ каната.

4. Условие сдвига. Пока ящик покоится, трение покоя уравновешивает силы каната: $F_{\text{тр}} = 2F$. Трение покоя не больше $\mu N = 6\mu mg$. Ящик сдвинется, когда $2F$ превысит наибольшее трение покоя:

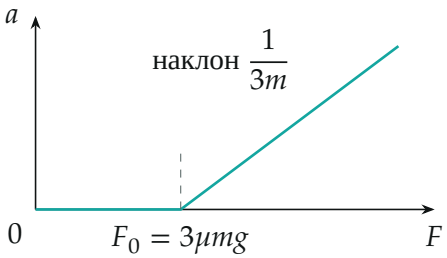
$$2F > \mu(M+m)g \quad \Rightarrow \quad F > F_0 = \frac{\mu(M+m)g}{2} = 3\mu mg.$$

Сила F_0 — граница: при F сколь угодно чуть больше F_0 ящик поедет и дойдёт до цели (сила постоянна, ускорение положительно на всём пути).

Пункт 3.

5. Ускорение. При движении трение скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = 6\mu mg$. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$(M+m)a = 2F - \mu(M+m)g \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2F - 6\mu mg}{6m} = \frac{F - 3\mu mg}{3m}.$$



Ускорение ящика в зависимости от силы, с которой человек тянет канат: до F_0 ящик держит трение покоя.

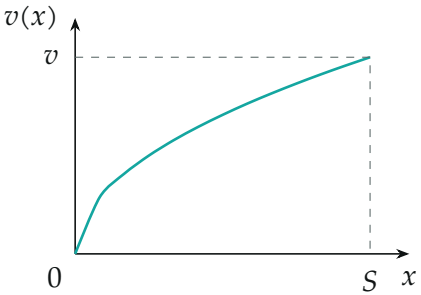
6. Скорость. Движение равноускоренное без начальной скорости, путь S: $v^2 = 2aS$,

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{\frac{2S(F - 3\mu mg)}{3m}}.$$

7. Второй способ — теорема о кинетической энергии. Человек не движется относительно ящика, поэтому точки приложения обеих сил каната сдвигаются на S. Работа внешних сил над системой равна приросту её кинетической энергии:

$$2F \cdot S - \mu(M+m)g \cdot S = \frac{(M+m)v^2}{2},$$

$$v^2 = \frac{2S(2F - 6\mu mg)}{6m} \text{ — то же.}$$



Скорость ящика в зависимости от пройденного пути: $v \propto \sqrt{x}$ при равноускоренном движении (построено по точкам).

8. Подошвы человека. Проверим, что человек может удержаться на ящике. Второй закон Ньютона для человека по оси x: канат тянет его к стене с силой F, ящик действует на ноги горизонтальной силой f (упором и трением) от стены, $ma = F - f$, откуда $f = F - ma = \frac{2}{3}F + \mu mg$ — обычная сила, которую даёт упор ногами; поэтому в условии и сказано, что человек упирается.

Обратите внимание. Канат действует на систему двумя силами: человек, держащий канат, — часть системы, и сила, с которой канат тянет его руки, внешняя. Если учесть только ветвь, привязанную к ящику, получится $F_0 = 6\mu mg$ — вдвое больше верного.

Проверка. Размерность: μmg — ньютоны, $\sqrt{FS/m}$ — м/с. Предел: при $F \to F_0$ скорость $v \to 0$, при $\mu = 0$ получаем $v = \sqrt{2FS/(3m)}$ — работа $2FS$ целиком идёт в кинетическую энергию массы $6m$. Смысл:

блок у стены удваивает силу, с которой человек тянет себя вместе с ящиком.

Ответ. 1) $N = (M + m)g = 6mg$; 2) $F_0 = \dfrac{\mu(M + m)g}{2} = 3\mu mg$; 3) $v = \sqrt{\dfrac{2S(F - 3\mu mg)}{3m}}$.