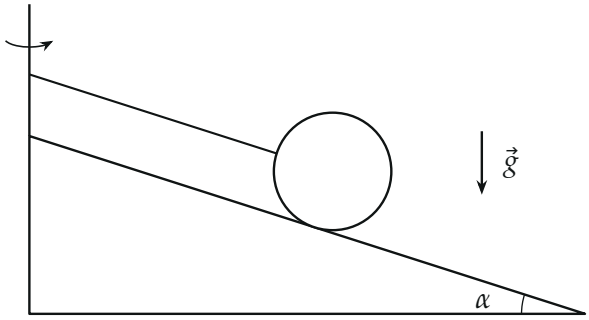
# Шар на клине, удерживаемый нитью

**Задача 3.** [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 3] Однородный шар массой $m$ и радиусом $R$ находится на гладкой поверхности клина, наклонённой под углом $\alpha$ к горизонту (см. рис.). Шар удерживается нитью длиной $L$, привязанной к вертикальной оси, проходящей через вершину клина. Нить параллельна поверхности клина.




1. Найдите силу натяжения нити, если система покоится.
2. Найдите силу натяжения нити, если система вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину клина, а шар не отрывается от клина.

▲ **Решение. Что происходит.** На шар действуют три силы: тяжести, реакции гладкой поверхности клина (по нормали, через центр шара) и натяжения нити. Две из них проходят через центр шара, значит, и нить направлена через центр — иначе её сила вращала бы шар. В покое это задача на равновесие, при вращении — на движение по окружности: центр шара описывает горизонтальную окружность вокруг оси, и равнодействующая сил сообщает ему центростремительное ускорение, направленное горизонтально к оси. Оси выберем вдоль склона и по нормали к нему: тогда в уравнение для $T$ не войдёт неизвестная $N$.

**Обозначения.** $O$ — центр шара; ось $x$ — вдоль склона вверх, к оси вращения (по нити); ось $y$ — по нормали к склону от поверхности; $N$ — сила реакции клина; $r$ — радиус окружности, по которой движется центр шара.

**Пункт 1.**

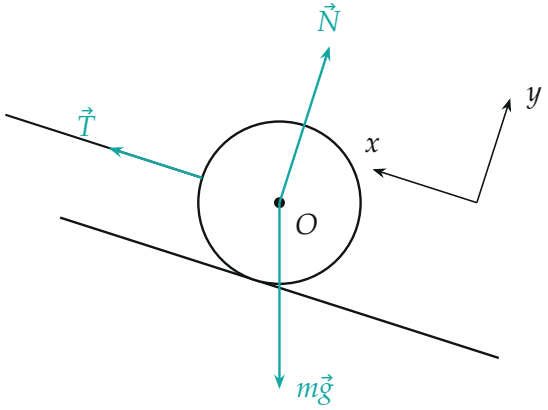
**1. Равновесие.** Второй закон Ньютона для шара при $\vec{a} = 0$:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = 0.$$

В проекции на ось $x$ сила $\vec{N}$ не участвует (она перпендикулярна склону), $\vec{T}$ даёт $+T$, сила тяжести — $-mg\sin\alpha$ (она тянет шар вниз по склону):

$$T - mg\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = mg\sin\alpha.$$

Попутно из проекции на $y$: $N_0 = mg\cos\alpha$.



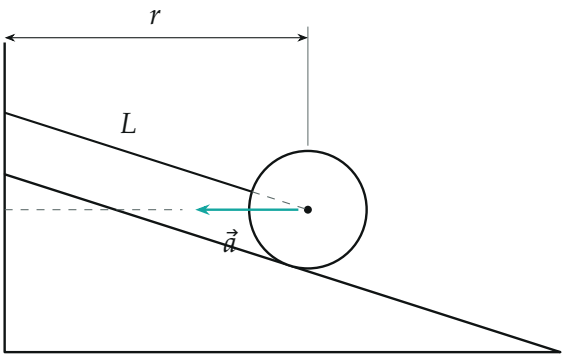

*Тело $m$: силы, действующие на шар. $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ приложены к центру, нить направлена через центр. Ось $x$ — вдоль склона к оси вращения, $y$ — по нормали.*

**Пункт 2.**

**2. Куда направлено ускорение.** Центр шара движется по горизонтальной окружности вокруг оси вращения с угловой скоростью $\omega$. Её радиус — расстояние от центра шара до оси по горизонтали. Нить длиной $L$ идёт от оси до поверхности шара, дальше до центра ещё $R$ вдоль той же прямой, наклонённой к горизонту под углом $\alpha$:

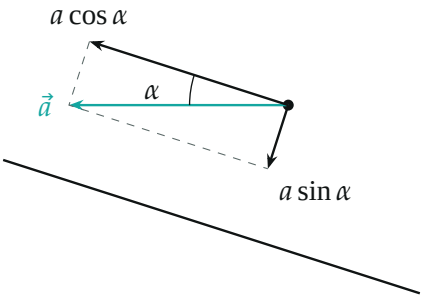
$$r = (L + R)\cos\alpha.$$

Ускорение центра — центростремительное, горизонтальное, к оси: $a = \omega^2 r$.




*Центр шара удалён от оси на $r = (L+R)\cos\alpha$; при вращении его ускорение $\vec{a}$ горизонтально и направлено к оси.*

**3. Проекции ускорения.** Разложим $\vec{a}$ по нашим осям. Ось $x$ (вдоль склона вверх) составляет с горизонталью угол $\alpha$, поэтому $a_x = a\cos\alpha$; на нормаль $y$ ускорение проецируется отрицательно: $a_y = -a\sin\alpha$ (горизонтальный вектор к оси «смотрит» немного в склон).




*Разложение горизонтального ускорения на составляющие вдоль склона ($a\cos\alpha$, вверх) и по нормали к нему ($a\sin\alpha$, в склон).*

**4. Второй закон Ньютона по оси $x$.** Силы те же, что в покое; $N$ на $x$ не проецируется:

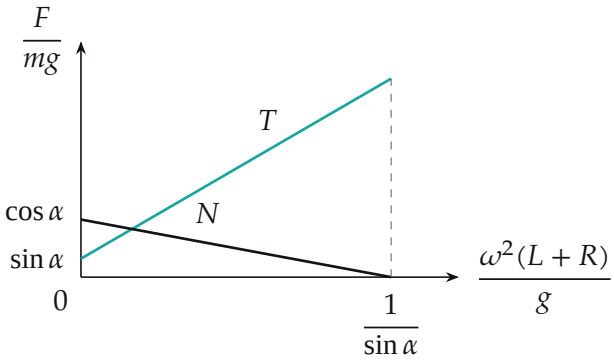
$$ma\cos\alpha = T - mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = mg\sin\alpha + m\omega^2(L+R)\cos^2\alpha.$$

Натяжение больше, чем в покое: нить должна не только удержать шар от соскальзывания, но и «тянуть» его к оси по окружности.

**5. Условие «не отрывается».** Проекция на ось $y$:

$$-ma\sin\alpha = N - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad N = m\cos\alpha\left[g - \omega^2(L+R)\sin\alpha\right].$$

Шар прижат к клину, пока $N \geq 0$, то есть $\omega^2 \leq \dfrac{g}{(L+R)\sin\alpha}$; при этом условии и верен ответ пункта 2.




*Натяжение нити $T$ и реакция клина $N$ в зависимости от $\omega^2$ (построено для угла рисунка условия, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}32$). Справа от $\omega^2 = g/((L+R)\sin\alpha)$ шар отрывается от клина.*

**6. Второй способ — в системе отсчёта клина.** Во вращающейся системе на шар действует ещё центробежная сила инерции $m\omega^2 r$, горизонтально от оси. Шар покоится, и проекция сил на ось $x$: $T - mg\sin\alpha - m\omega^2 r\cos\alpha = 0$ — то же уравнение, тот же ответ.

**Обратите внимание.** Радиус окружности — расстояние от оси до *центра* шара по горизонтали: $(L+R)\cos\alpha$, а не $L$ и не $L\cos\alpha$. Нить привязана к поверхности шара, а движется по окружности радиуса $r$ его центр масс.

**Проверка.** Размерность: $\omega^2(L+R)$ — м/с$^2$, как $g$. Предел $\omega \to 0$ даёт ответ пункта 1. При $\alpha \to 0$ (горизонтальная гладкая плоскость) $T = m\omega^2(L+R)$ — нить одна создаёт центростремительную силу, как и должно быть. Смысл: вращение добавляет к $mg\sin\alpha$ ту часть центростремительной силы, которая направлена вдоль нити.

**Ответ.** 1) $T_0 = mg\sin\alpha$; 2) $T = mg\sin\alpha + m\omega^2(L+R)\cos^2\alpha$ (при $\omega^2 \leq g/((L+R)\sin\alpha)$).