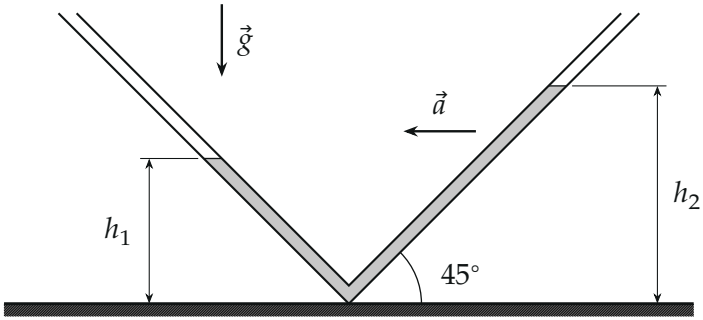
Трубка с маслом на ускоренной тележке

Задача 4. [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 4] Трубка, изогнутая под прямым углом, расположена в вертикальной плоскости и заполнена маслом (см. рис.). Угол $\alpha = 45°$. При равноускоренном движении трубки в горизонтальном направлении уровни масла в коленах трубки устанавливаются на высотах $h_1 = 8$ см и $h_2 = 12$ см.



1. Найдите ускорение a трубки.
2. С какой максимальной скоростью V будет двигаться жидкость относительно трубки после того, как трубка внезапно станет двигаться равномерно (ускорение «исчезнет»)?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Действие сил трения пренебрежимо мало.

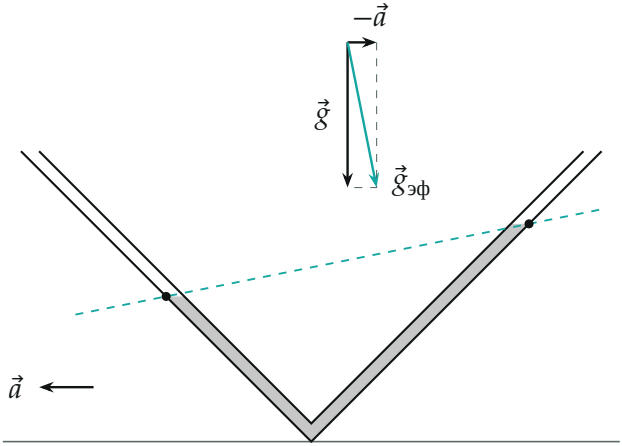
▲ **Решение. Что происходит.** Пока трубка движется с ускорением, масло покоится относительно неё, но уровни в коленах разные: правый выше. Удобно перейти в систему отсчёта трубки. В ней на каждую частицу масла, кроме силы тяжести, действует сила инерции $-m\vec{a}$ — против ускорения, то есть вправо. Вместе они дают «эффективную тяжесть» $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$, наклонённую вправо; свободные поверхности масла лежат на одной плоскости, перпендикулярной $\vec{g}_{\text{эф}}$ (давление на них одинаковое, атмосферное). Когда ускорение исчезает, остаётся только $\vec{g}$, уровни стремятся сравняться, и масло начинает колебаться. Наибольшая скорость — при прохождении положения равновесия; её даёт закон сохранения энергии.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вертикально вверх, начало — вершина угла трубки; ρ — плотность масла, S — сечение трубки; ℓ — длина столба масла вдоль трубки.

Пункт 1.

1. Система отсчёта трубки. Ускорение трубки $\vec{a}$ направлено влево (как на рисунке). В её системе масло покоится под действием силы тяжести, силы инерции $-m\vec{a}$ (вправо) и сил давления. Эффективное ускорение свободного падения

$$\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}, \qquad g_{\text{эф},x} = a, \quad g_{\text{эф},y} = -g.$$



В системе трубки к тяжести добавляется сила инерции $-m\vec{a}$ (вправо). Свободные поверхности масла лежат на плоскости, перпендикулярной $\vec{g}_{\text{эф}}$ (бирюзовая пунктирная прямая); масштаб — для найденного $a = g/5$.

2. Условие равновесия масла. Для покоящейся жидкости в поле $\vec{g}_{\text{эф}}$ давление растёт вдоль $\vec{g}_{\text{эф}}$: на малом смещении $\Delta\vec{r}$ изменение давления $\Delta p = \rho\,\vec{g}_{\text{эф}}\cdot\Delta\vec{r} = \rho(a\Delta x - g\Delta y)$. Свободные поверхности в обоих коленах находятся при одном и том же (атмосферном) давлении, поэтому между ними $\Delta p = 0$:

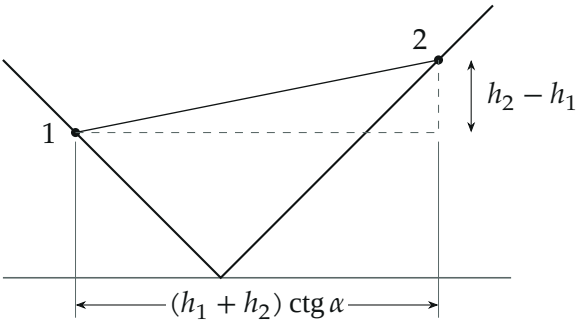
$$a(x_2 - x_1) = g(y_2 - y_1).$$

3. Координаты уровней. Колени наклонены под α, поэтому уровень на высоте h отстоит от вершины по горизонтали на $h\operatorname{ctg}\alpha$: левый — в

точке $(-h_1 \operatorname{ctg}\alpha;\, h_1)$, правый — в $(h_2 \operatorname{ctg}\alpha;\, h_2)$. Подставим:

$$a(h_1 + h_2)\operatorname{ctg}\alpha = g(h_2 - h_1) \quad \Rightarrow \quad a = g \operatorname{tg}\alpha \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2},$$

$$a = 10 \cdot 1 \cdot \frac{4}{20}\ \text{м/с}^2 = 2\ \text{м/с}^2.$$



Прямая через уровни 1 *и* 2 *наклонена к горизонту с тангенсом* a/g*: подъём* $h_2 - h_1$ *на горизонтальном пути* $(h_1 + h_2)\operatorname{ctg}\alpha$.

Пункт 2.

4. Новое равновесие. После исчезновения ускорения система трубки снова инерциальна, на масло действуют только тяжесть и давление. Равновесие — при одинаковых уровнях h_0. Масло несжимаемо, сечение одно, и длина столба вдоль трубки $\ell = \dfrac{h_1 + h_2}{\sin\alpha}$ не меняется, поэтому $h_0 = \dfrac{h_1 + h_2}{2} = 10$ см. Масло перетекает из правого колена в левое; в момент равенства уровней его скорость наибольшая (до этого его разгоняет разность уровней, после — тормозит).

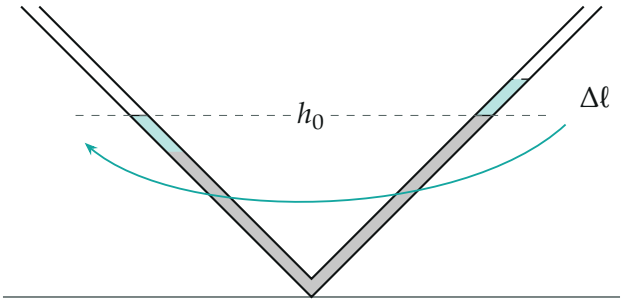
5. Закон сохранения энергии. Трения нет, стенки трубки работы над маслом не совершают (её скорость постоянна, а давление стенок перпендикулярно движению масла относительно трубки). От начала до равенства уровней всё изменение потенциальной энергии сводится к переносу кусочка масла длиной $\Delta\ell = \dfrac{h_2 - h_0}{\sin\alpha}$ из верхней части правого колена

(центр масс на высоте $\frac{h_2+h_0}{2}$) в верхнюю часть левого (центр масс на высоте $\frac{h_1+h_0}{2}$); остальное масло только сдвигается вдоль трубки, занимая места друг друга. Масса кусочка $\rho S\Delta\ell$, весь столб массой $\rho S\ell$ движется с одной скоростью V:

$$\rho S\Delta\ell \cdot g\left(\frac{h_2+h_0}{2}-\frac{h_1+h_0}{2}\right)=\frac{\rho S\ell\, V^2}{2}.$$

С $\Delta\ell=\dfrac{h_2-h_1}{2\sin\alpha}$ и $\ell=\dfrac{h_1+h_2}{\sin\alpha}$:

$$V=(h_2-h_1)\sqrt{\frac{g}{2(h_1+h_2)}}=0{,}04\sqrt{\frac{10}{0{,}4}}\text{ м/с}=0{,}2\text{ м/с}.$$



Состояние с равными уровнями h_0 (серое). По сравнению с началом кусочек масла длиной $\Delta\ell$ из верха правого колена как бы перенесён в верх левого (бирюзовые участки) — он и даёт выигрыш потенциальной энергии.

6. Второй способ — колебания. Сместим столб на s вдоль трубки из равновесия: уровни разойдутся на $2s\sin\alpha$, и разность давлений $\rho g\cdot 2s\sin\alpha$ толкает столб обратно. Второй закон Ньютона для всего столба (масса $\rho S\ell$) в проекции на направление вдоль трубки:

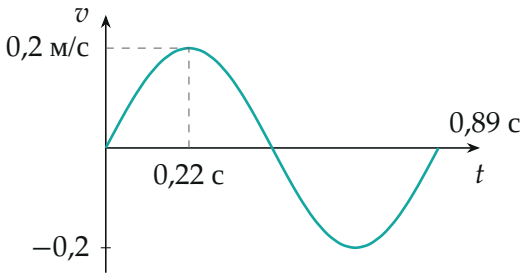
$$\rho S\ell\,\ddot{s}=-2\rho gS\sin\alpha\cdot s \quad\Rightarrow\quad \Omega^2=\frac{2g\sin\alpha}{\ell}=\frac{2g\sin^2\alpha}{h_1+h_2}.$$

Это гармонические колебания; амплитуда — начальное смещение $s_0=$

$\Delta\ell = \dfrac{h_2 - h_1}{2\sin\alpha}$, наибольшая скорость

$$V = \Omega s_0 = \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}}\,\sin\alpha \cdot \frac{h_2 - h_1}{2\sin\alpha} = (h_2 - h_1)\sqrt{\frac{g}{2(h_1 + h_2)}}$$ — то же.

Здесь $\Omega \approx 7{,}1\ \text{с}^{-1}$, период $\approx 0{,}89$ с.



Скорость масла относительно трубки после исчезновения ускорения (по вычисленным Ω и V). Наибольшая скорость 0,2 м/с — через четверть периода, при равных уровнях.

Обратите внимание. В энергию входит масса *всего* столба масла — движется весь столб, а не только перетекающий кусочек. Угол α в ответ не вошёл: и выигрыш энергии, и масса столба пропорциональны $1/\sin\alpha$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{g/h}\cdot h$ — м/с; $g\,\frac{\Delta h}{h}$ — м/с^2. Пределы: при $h_1 = h_2$ ускорение $a = 0$ и $V = 0$ — уровни уже равны. Ускорение 2 м/с^2 направлено влево, и масло «отстаёт», поднимаясь в правом колене, — как вода в разгоняющемся стакане. Смысл: разность уровней измеряет ускорение, а после его исчезновения превращается в кинетическую энергию колебаний.

Ответ. 1) $a = g\,\text{tg}\,\alpha\,\dfrac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2} = 2$ м/с^2; 2) $V = (h_2 - h_1)\sqrt{\dfrac{g}{2(h_1 + h_2)}} = 0{,}2$ м/с.