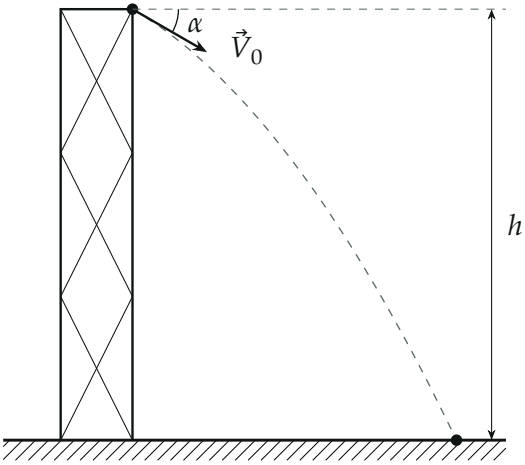
Бросок с вышки с известной конечной скоростью

Задача 1. [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 1] Мальчик бросает стальной шарик с вышки со скоростью $V_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. В полёте шарик всё время приближался к горизонтальной поверхности Земли и упал на неё со скоростью $2V_0$.

1. Найдите вертикальную компоненту скорости шарика при падении на Землю.
2. Найдите время полёта шарика.
3. С какой высоты был брошен шарик?

Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.



Поясняющий рисунок: шарик всё время приближается к Земле, значит, его бросили под углом α вниз *от горизонта. Траектория построена по вычисленным точкам.*

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту. Слова «всё время приближался к Земле» — ключ к условию: если бросить шарик вверх, он сначала поднимался бы и удалялся от Земли. Значит, шарик брошен под углом 30° *вниз* от горизонтали. В полёте на шарик действует только сила тяжести: горизонтальная составляющая скорости постоянна, вертикальная равномерно

растёт. По модулю конечной скорости и горизонтальной составляющей найдём вертикальную, затем время; высоту проще всего дать закону сохранения энергии.

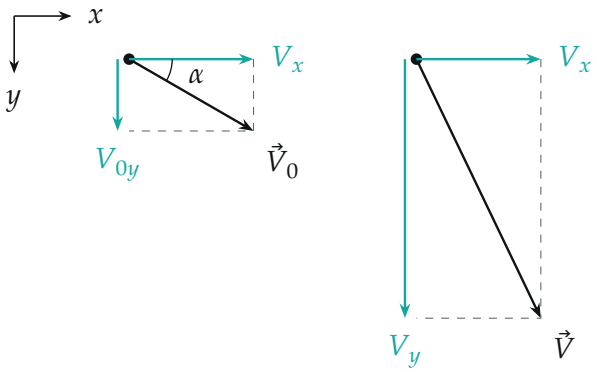
Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вертикально *вниз* (так все проекции скорости положительны); V_x — горизонтальная составляющая скорости, V_{0y} и V_y — вертикальные в начале и при падении; τ — время полёта, h — высота точки броска.

Пункт 1.

1. Проекции начальной скорости. Разложим $\vec{V}_0$ по осям:

$$V_x = V_0 \cos\alpha = 5\sqrt{3}\ \text{м/с} \approx 8{,}66\ \text{м/с}, \qquad V_{0y} = V_0 \sin\alpha = 5\ \text{м/с}.$$

2. Горизонтальная составляющая сохраняется. Второй закон Ньютона для шарика $m\vec{a} = m\vec{g}$ в проекции на ось x: $a_x = 0$, поэтому при падении V_x та же.

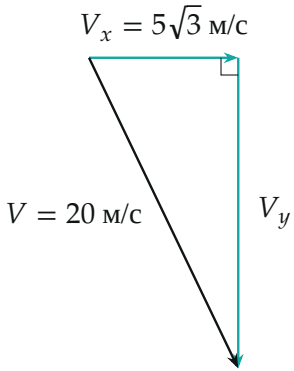


Скорость в момент броска (слева) и при падении (справа), в одном масштабе. Горизонтальная проекция V_x не меняется, вертикальная растёт с 5 до 18 м/с.

3. Вертикальная составляющая при падении. Модуль конечной скорости $V = 2V_0 = 20$ м/с; по теореме Пифагора для треугольника скоростей

$$V_y = \sqrt{V^2 - V_x^2} = V_0\sqrt{4 - \cos^2\alpha} = V_0\sqrt{3{,}25} = 5\sqrt{13}\ \text{м/с} \approx 18\ \text{м/с}.$$

Скорость при падении направлена вниз.



Треугольник скоростей при падении: гипотенуза $V = 2V_0$, катет V_x известен, второй катет — искомая V_y.

Пункт 2.

4. Время полёта. Второй закон Ньютона в проекции на ось y (вниз): $a_y = g$, вертикальная скорость растёт равномерно, $V_y = V_{0y} + g\tau$:

$$\tau = \frac{V_y - V_{0y}}{g} = \frac{V_0\left(\sqrt{3{,}25} - \sin\alpha\right)}{g} = \frac{18{,}03 - 5}{10}\text{ с} \approx 1{,}3\text{ с}.$$

Пункт 3.

5. Высота — закон сохранения энергии. Сопротивления нет, работает только сила тяжести, поэтому механическая энергия шарика сохраняется от броска до падения:

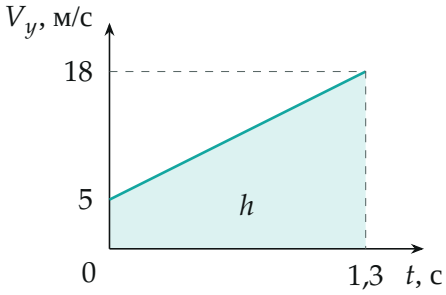
$$\frac{mV_0^2}{2} + mgh = \frac{m(2V_0)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V_0^2}{2g} = \frac{3\cdot 100}{20}\text{ м} = 15\text{ м}.$$

Обратите внимание: угол броска в ответ не вошёл — энергия от направления скорости не зависит.

6. Второй способ — график $V_y(t)$. Вертикальный путь — площадь

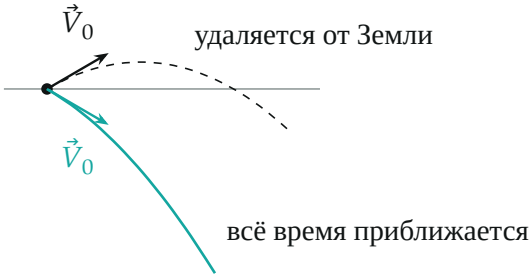
трапеции под графиком:

$$h = \frac{V_{0y} + V_y}{2}\,\tau = \frac{V_y^2 - V_{0y}^2}{2g} = \frac{325 - 25}{20}\ \text{м} = 15\ \text{м}.$$



Вертикальная скорость растёт линейно с наклоном g; площадь под графиком (бирюзовая трапеция) равна высоте броска.

7. Почему именно вниз. Если бы шарик бросили на 30° вверх, первые 0,5 с он поднимался бы, удаляясь от Земли, — это противоречит условию.



Два варианта броска под 30° с одной высоты (масштаб по x и y одинаковый). Условию подходит только бросок вниз (бирюзовый).

Обратите внимание. Угол 30° «к горизонту» здесь отсчитан вниз. Для пунктов 1 и 3 это не важно (там нужен только модуль V_y и энергия), но время полёта при броске вверх было бы другим: $\tau = V_0(\sqrt{3{,}25} + \sin\alpha)/g \approx 2{,}3$ с.

Проверка. Размерности: V_0/g — секунды, V_0^2/g — метры. Высота получена двумя способами (энергия и площадь под графиком) — 15 м. Время: путь по вертикали $V_{0y}\tau + g\tau^2/2 = 5\cdot 1{,}303 + 5\cdot 1{,}303^2 \approx 15{,}0$ м — сходится. Смысл: при падении с 15 м вертикальная скорость вырастает в 3,6 раза, а горизонтальная остаётся прежней.

Ответ. 1) $V_y = V_0\sqrt{4-\cos^2\alpha} \approx 18$ м/с (вниз); 2) $\tau = \dfrac{V_y - V_0\sin\alpha}{g} \approx 1{,}3$ с; 3) $h = \dfrac{3V_0^2}{2g} = 15$ м.