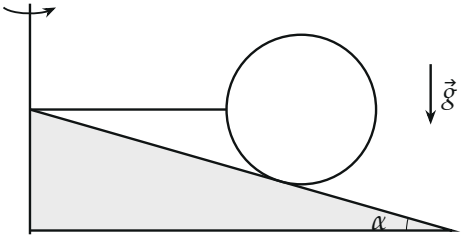
Шар на клине с горизонтальной нитью

Задача 3. [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 3] Однородный шар массой m находится на гладкой поверхности клина, наклонённой под углом α к горизонту (см. рис.). Шар удерживается горизонтально натянутой нитью длиной L, привязанной к вершине клина.



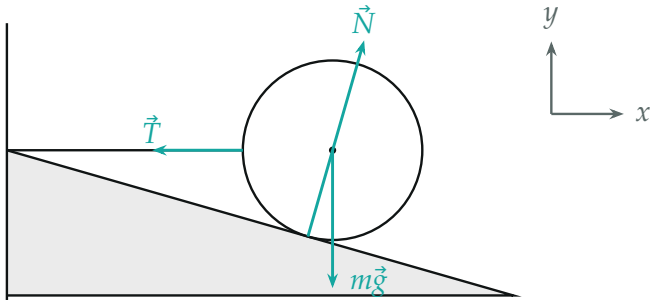
1. Найдите силу натяжения нити, если система покоится.
2. Найдите силу натяжения нити, если система вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину клина.

▲ **Решение. Что происходит.** На шар действуют три силы: тяжести, натяжения горизонтальной нити и реакции гладкого клина (по нормали к его поверхности, через центр шара). В покое они уравновешены. При вращении центр шара движется по окружности, и равнодействующая должна создавать центростремительное ускорение, направленное к оси, — горизонтально, вдоль нити. Вертикальное равновесие от вращения не меняется, поэтому реакция клина та же, и весь «добавок» берёт на себя нить. Тонкое место — радиус окружности: это не L, а расстояние от оси до *центра* шара, и его надо найти из геометрии. Класс задачи: динамика вращательного движения, равновесие тела на наклонной плоскости.

Обозначения. O — вершина клина (на оси), C — центр шара, K — точка касания шара и клина, r — радиус шара, $d = OC$ — радиус окружности, по которой движется центр шара. Ось x — горизонтально от оси вращения, ось y — вверх.

Пункт 1. Силы, действующие на шар: $m\vec{g}$ вниз; $\vec{T}$ вдоль нити к вершине (против оси x); $\vec{N}$ по нормали к поверхности клина. Поверхность

наклонена на угол α, поэтому нормаль отклонена от вертикали на тот же угол α — в сторону от вершины (клин опускается вправо).



Силы, действующие на шар. Нить горизонтальна и проходит через центр шара (она натянута по продолжению радиуса), реакция $\vec{N}$ — по нормали к склону, тоже через центр.

Условие равновесия шара (первый закон Ньютона) в проекциях:

$$x:\ N\sin\alpha - T = 0; \qquad y:\ N\cos\alpha - mg = 0.$$

Из второго $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, из первого

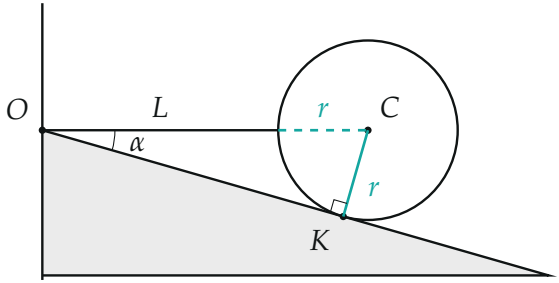
$$T_1 = N\sin\alpha = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Пункт 2.

1. Радиус вращения центра шара. Нить горизонтальна и привязана к поверхности шара, а сила натяжения направлена по нити — значит, нить лежит на продолжении радиуса, центр C на одной горизонтали с вершиной O и $OC = L + r$. Шар касается склона в точке K, радиус CK перпендикулярен склону. В прямоугольном треугольнике OKC угол при вершине O равен α (между горизонталью OC и склоном OK):

$$CK = OC\sin\alpha:\qquad r = (L+r)\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{L\sin\alpha}{1-\sin\alpha},$$

$$d = L + r = \frac{L}{1-\sin\alpha}.$$



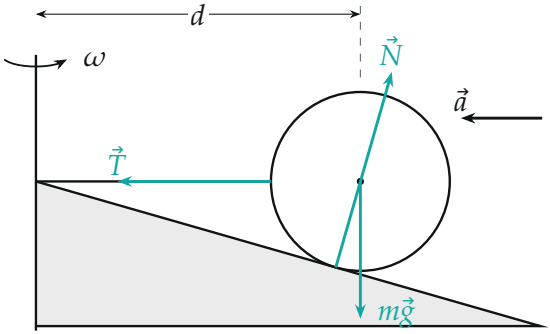
Геометрия: $OC = L + r$, $CK \perp OK$, угол $COK = \alpha$, поэтому $r = (L + r)\sin\alpha$.

2. Второй закон Ньютона. Система вращается равномерно, центр шара движется по окружности радиуса d вокруг вертикальной оси; ускорение центростремительное, $a = \omega^2 d$, направлено к оси — против оси x. Шар однородный, поэтому для его центра масс (второй закон Ньютона для поступательного движения центра масс):

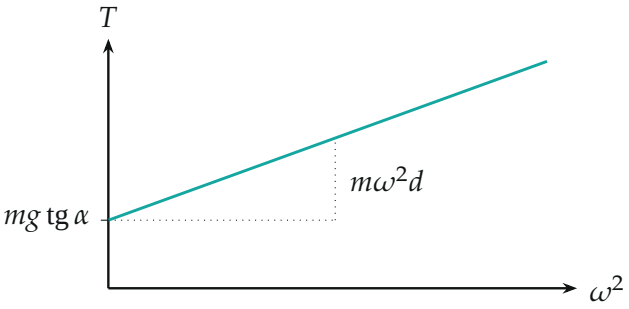
$$x:\ N\sin\alpha - T = -m\omega^2 d; \qquad y:\ N\cos\alpha - mg = 0.$$

Вертикальное уравнение то же, что и в покое: $N = mg/\cos\alpha$ — шар прижат к клину с той же силой и не отрывается от него при любой ω. Тогда

$$T_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha + m\omega^2 d = m\Big(g\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\omega^2 L}{1-\sin\alpha}\Big).$$



При вращении: те же силы, но их равнодействующая $T - N\sin\alpha$ направлена к оси и создаёт ускорение $a = \omega^2 d$.



Сила натяжения растёт линейно с ω^2; при $\omega = 0$ — ответ пункта 1. Наклон прямой $md = \frac{mL}{1-\sin\alpha}$.

Обратите внимание: радиус вращения — не длина нити L, а $L + r$; радиус шара в условии не дан, но он однозначно задан тем, что горизонтальная нить из вершины упирается в шар, лежащий на склоне.

Проверка. Размерность: $[m\omega^2 L] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м} = \text{Н}$. Пределы: $\omega = 0$ даёт пункт 1; $\alpha \to 0$ (горизонтальная опора) — нить в покое не нужна, $T_1 \to 0$, а при вращении $T_2 \to m\omega^2 L$: шар радиуса $r \to 0$ на нити длины L — обычный конический маятник на столе. Второй способ для T_1 — треугольник сил: $m\vec{g}$, $\vec{T}$ и $\vec{N}$ образуют прямоугольный треугольник с углом α между $\vec{N}$ и вертикалью, $T = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Ответ. 1) $T_1 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $T_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{m\omega^2 L}{1-\sin\alpha}$.