Г-образная трубка с ртутью

Задача 4. [Физтех 2019/20, 10 класс, задача 4] Тонкая Г-образная трубка с горизонтальным коленом, закрытым с одного конца, и вертикальным коленом высотой $H = 40$ мм, открытым в атмосферу, заполнена полностью ртутью (см. рис.). Если трубку двигать (в плоскости рисунка) с ускорением, не большим некоторого a_0, то ртуть из трубки не выливается.



1. Найдите давление P_1 внутри трубки в точке A, находящейся от вертикального колена на расстоянии $1/3$ длины горизонтального колена, если трубка движется с ускорением a_0.
2. Найдите давление P_2 в точке A, если трубка движется с ускорением $0{,}6\,a_0$.
3. Найдите давление P_3 вблизи закрытого конца трубки, если она движется с ускорением $0{,}8\,a_0$.

Атмосферное давление $P_0 = 740$ мм рт. ст. Давлением насыщенных паров ртути в условиях опыта пренебречь. Ответы дать в «мм рт. ст.».

▲ **Решение. Что происходит.** Чтобы ртуть в горизонтальном колене двигалась с ускорением $\vec{a}$ к закрытому концу, её должна толкать разность давлений: давление у закрытого конца меньше, чем у колена, и падает вдоль трубки линейно. Чем больше ускорение, тем ниже давление у закрытого конца. Когда оно доходит до нуля (паров ртути нет), ртуть отрывается от закрытого конца, там образуется пустота, а ртуть выплёскивается из открытого колена. Это и есть предельное ускорение a_0. Класс задачи: гидростатика в ускоренно движущемся сосуде.

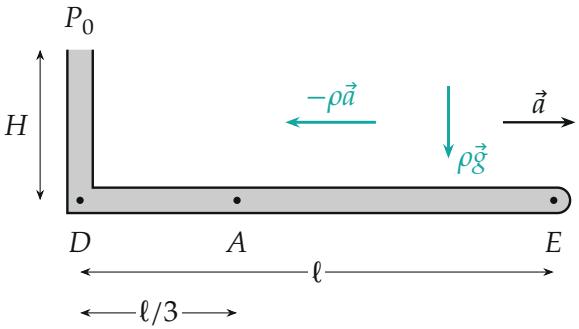
Обозначения. ρ — плотность ртути, ℓ — длина горизонтального колена, x — расстояние вдоль горизонтального колена от вертикального колена (точка D на сгибе, $x = 0$) к закрытому концу E ($x = \ell$). Давления удобно мерить сразу в мм рт. ст.: столб ртути высотой 1 мм создаёт давление $\rho g \cdot 1$ мм $= 1$ мм рт. ст.

1. Вертикальное колено. Ускорение горизонтально, поэтому по вертикали ртуть в равновесии: давление на сгибе (закон гидростатики, вертикальный столб высотой H под атмосферой)

$$P_D = P_0 + \rho g H = 740 + 40 = 780 \text{ мм рт. ст.}$$

2. Горизонтальное колено. Перейдём в систему отсчёта трубки: в ней ртуть покоится, но на каждый её объём, кроме силы тяжести $\rho\vec{g}$, действует сила инерции $-\rho\vec{a}$ (на единицу объёма), направленная от закрытого конца к колену. Условие равновесия кусочка ртути длиной dx и сечением S в проекции на ось x: $P(x)S - P(x+dx)S - \rho a\, S\, dx = 0$, то есть давление убывает к закрытому концу с постоянным градиентом ρa:

$$P(x) = P_D - \rho a x = P_0 + \rho g H - \rho a x.$$



В системе отсчёта трубки на ртуть действуют сила тяжести и сила инерции $-\rho\vec{a}$ (на единицу объёма). Давление вдоль горизонтального колена падает от D к закрытому концу E.

3. Предельное ускорение. У закрытого конца давление наименьшее:

$$P_E = P_0 + \rho g H - \rho a \ell.$$

Ртуть не может быть «растянута» (давление насыщенных паров ничтожно), поэтому должно быть $P_E \geq 0$. При $P_E < 0$ ртуть отрывается от

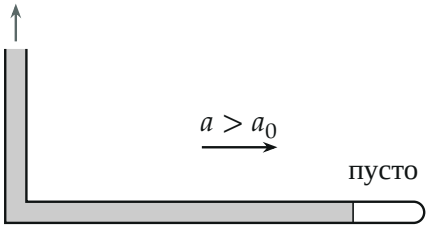
закрытого конца и вытекает через открытое колено. Значит,

$$\rho a_0 \ell = P_0 + \rho g H = 780 \text{ мм рт. ст.}$$

Тогда при ускорении $a = ka_0$ давление на расстоянии x:

$$P(x) = (P_0 + \rho g H)\Big(1 - k\,\frac{x}{\ell}\Big).$$

Опасно именно ускорение к закрытому концу, как на рисунке: при ускорении в обратную сторону давление в горизонтальном колене только растёт.



Что будет при $a > a_0$: у закрытого конца давление упало бы ниже нуля — ртуть отрывается, у конца образуется пустота, а из открытого колена ртуть выплёскивается.

4. Ответы.

Пункт 1: $k = 1$, $x = \ell/3$:

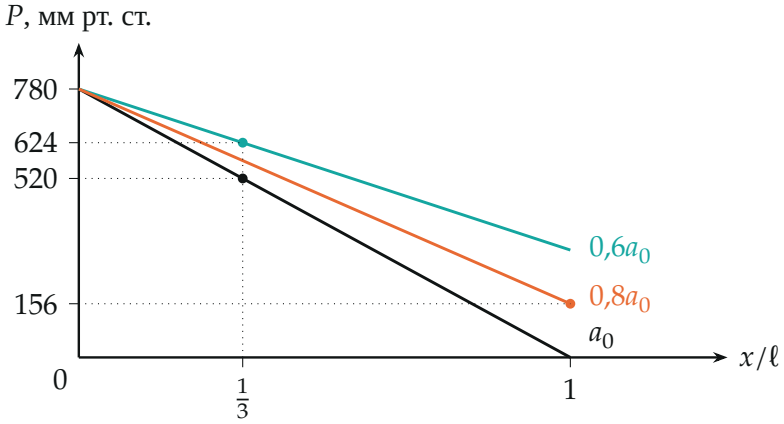
$$P_1 = 780\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = 520 \text{ мм рт. ст.}$$

Пункт 2: $k = 0{,}6$, $x = \ell/3$:

$$P_2 = 780\,(1 - 0{,}2) = 624 \text{ мм рт. ст.}$$

Пункт 3: $k = 0{,}8$, $x = \ell$:

$$P_3 = 780\,(1 - 0{,}8) = 156 \text{ мм рт. ст.}$$



Давление вдоль горизонтального колена при трёх ускорениях: прямые из одной точки 780 мм рт. ст. на сгибе; при a_0 давление у закрытого конца ровно нуль.

Обратите внимание: на сгибе давление не зависит от ускорения — там всегда $P_0 + \rho g H$, ведь вертикальное колено ускоряется горизонтально, и столб ртути в нём держится только силой тяжести. Длина колена ℓ и сам a_0 не нужны: ответы выражаются через доли.

Проверка. Размерность: $\rho a x$ — давление (кг/м^3 · м/с^2 · м = Па). Пределы: при $a = 0$ давление всюду в колене 780 мм рт. ст. (горизонтальная ртуть под столбом H); при $a = a_0$ у конца 0. Второй способ для P_1: ртуть на участке от A до E (длина $\frac{2}{3}\ell$, сечение S) разгоняется только силой $P_1 S$ (у конца давление нуль): $P_1 S = \rho S \cdot \frac{2}{3}\ell \cdot a_0$, $P_1 = \frac{2}{3} \cdot 780 = 520$ мм рт. ст.

Ответ. 1) $P_1 = \frac{2}{3}(P_0 + \rho g H) = 520$ мм рт. ст.; 2) $P_2 = 0{,}8(P_0 + \rho g H) = 624$ мм рт. ст.; 3) $P_3 = 0{,}2(P_0 + \rho g H) = 156$ мм рт. ст.