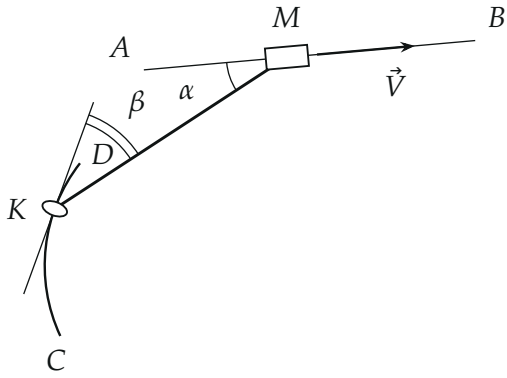
Муфта, кольцо и нить

Задача 1. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 1] Муфту M двигают со скоростью $V = 68$ см/с по горизонтальной направляющей AB (см. рис.). Кольцо K массой $m = 0{,}1$ кг может двигаться без трения по проволоке CD в виде дуги окружности радиусом $R = 1{,}9$ м. Кольцо и муфта связаны лёгкой нитью длиной $l = 5R/3$. Система находится в одной горизонтальной плоскости. В некоторый момент нить составляет угол α ($\cos\alpha = 15/17$) с направлением движения муфты и угол β ($\cos\beta = 4/5$) с направлением движения кольца.

1. Найти скорость кольца в этот момент.
2. Найти скорость кольца относительно муфты в этот момент.
3. Найти силу натяжения нити в этот момент.



▲ **Решение. Что происходит.** Это связанные движения двух тел: муфта едет по прямой с заданной скоростью, кольцо ограничено проволокой-дугой, а между ними нерастяжимая нить. Нить не может ни растянуться, ни провиснуть, поэтому скорости концов нити связаны, а кольцо в системе отсчёта муфты ходит по окружности радиуса l вокруг муфты. Сначала найдём скорость кольца из условия нерастяжимости нити, затем относительную скорость вычитанием векторов, и наконец силу: натяжение войдёт во второй закон Ньютона для кольца, а ускорение кольца найдём кинематикой.

Обозначения. $\vec{v}$ — скорость кольца, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$ — скорость кольца относительно муфты, T — сила натяжения нити, $\vec{N}$ — сила реакции проволоки. Орт $\vec{e}$ направлен вдоль нити от K к M; $\vec{\tau}$ — касательная к дуге в сторону движения кольца (к D); $\vec{n}$ — нормаль к дуге, направленная к её центру. Скорость муфты V постоянна по модулю и направлению: так сказано в условии (муфту «двигают со скоростью V»). Все силы лежат в горизонтальной плоскости, вертикальная составляющая (сила тяжести и реакция опоры) уравновешена и в уравнениях не участвует.

Пункт 1.

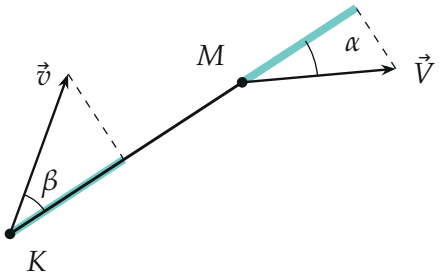
1. Направление скорости кольца. Кольцо сидит на проволоке, поэтому его скорость направлена по касательной $\vec{\tau}$ к дуге. Угол между $\vec{v}$ и нитью по условию равен β. Это единственное, что нужно знать о направлении $\vec{v}$.

2. Нерастяжимость нити. Нить не растягивается и не провисает, поэтому её концы сближаются или удаляются ровно с одной скоростью вдоль нити: проекции скоростей M и K на направление нити равны. На ось $\vec{e}$ проекция $\vec{V}$ равна $V\cos\alpha$ (муфта удаляется от кольца), проекция $\vec{v}$ равна $v\cos\beta$:

$$V\cos\alpha = v\cos\beta,$$

$$v = V\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 0{,}68\cdot\frac{15/17}{4/5} = 0{,}68\cdot\frac{75}{68} = 0{,}75 \text{ м/с}.$$

Проекция положительна, значит кольцо идёт в сторону D, как показано на рисунке.



Скорости концов нити и их проекции на нить (бирюзовые отрезки):

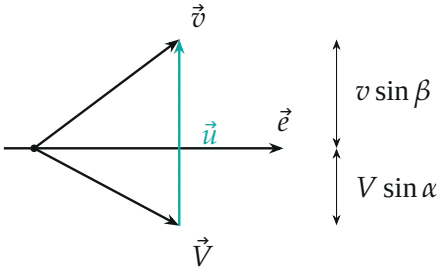
$V\cos\alpha = v\cos\beta$.

Пункт 2.

3. Скорость относительно муфты. Относительная скорость — разность векторов: $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$. Разложим всё по двум осям: вдоль нити $\vec{e}$ и поперёк неё. Вдоль нити проекции $\vec{v}$ и $\vec{V}$ равны (пункт 1), поэтому у $\vec{u}$ проекция на нить нулевая: относительно муфты кольцо движется перпендикулярно нити, и длина нити не меняется. Поперёк нити скорости $\vec{V}$ и $\vec{v}$ лежат по разные стороны от оси $\vec{e}$ (рисунок), поэтому их поперечные проекции вычитаются как числа с разными знаками, то есть модули складываются:

$$u = v\sin\beta + V\sin\alpha = 0{,}75\cdot 0{,}6 + 0{,}68\cdot\frac{8}{17} = 0{,}45 + 0{,}32 = 0{,}77 \text{ м/с}.$$

Здесь $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = 3/5$ и $\sin\alpha = \sqrt{1-(15/17)^2} = 8/17$.



Треугольник скоростей $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ в осях «вдоль нити — поперёк нити». Вектор $\vec{u}$ перпендикулярен нити.

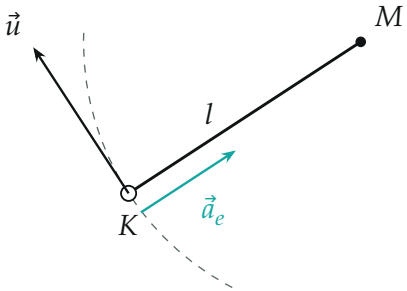
Второй способ даёт ту же картину: в системе отсчёта муфты нить закреплена одним концом и не меняет длины, поэтому кольцо на её конце может двигаться только по окружности радиуса l, то есть перпендикулярно нити.

Пункт 3.

4. Ускорение кольца вдоль нити. Муфта едет с постоянной скоростью, поэтому её система отсчёта инерциальна, и ускорение кольца в ней равно ускорению $\vec{a}$ в неподвижной системе. В системе муфты кольцо движется по окружности радиуса l со скоростью u, и составляющая

ускорения вдоль нити направлена к центру этой окружности, к муфте:

$$a_e = \frac{u^2}{l}, \qquad l = \frac{5R}{3} = \frac{5 \cdot 1{,}9}{3} \approx 3{,}17 \text{ м}, \qquad a_e = \frac{0{,}77^2}{3{,}17} \approx 0{,}187 \text{ м/с}^2.$$



В системе отсчёта муфты кольцо движется по окружности радиуса l вокруг муфты.

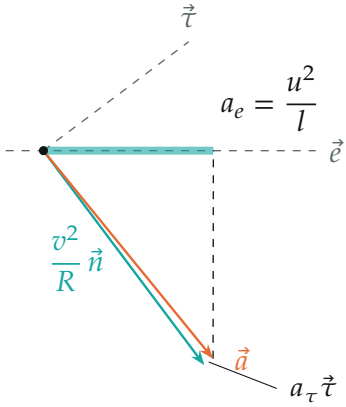
5. Ускорение кольца по дуге. В неподвижной системе кольцо движется по дуге радиуса R. Разложим ускорение по касательной и по нормали к дуге: $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$. Нормальная составляющая v^2/R известна, касательная a_τ — нет. Угол между $\vec{e}$ и $\vec{\tau}$ равен β, поэтому угол между $\vec{e}$ и $\vec{n}$ равен $90° - \beta$. Проекция $\vec{a}$ на нить через эти составляющие:

$$a_e = a_\tau \cos\beta + \frac{v^2}{R}\sin\beta.$$

Приравняем к значению пункта 4 и найдём a_τ:

$$a_\tau = \frac{1}{\cos\beta}\left(\frac{u^2}{l} - \frac{v^2}{R}\sin\beta\right) = \frac{0{,}187 - 0{,}5625 \cdot 0{,}6/1{,}9}{0{,}8} = \frac{0{,}187 - 0{,}178}{0{,}8} \approx 0{,}012 \text{ м/с}^2.$$

Нить тянет кольцо вперёд, к D, касательное ускорение положительно.



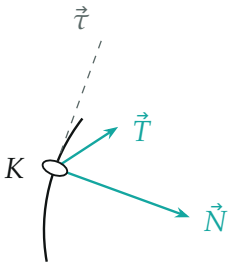
Разложение ускорения кольца и его проекция на нить (бирюзовый отрезок). Составляющая $a_\tau \vec{\tau}$ очень мала.

6. Второй закон Ньютона вдоль касательной. Горизонтальные силы на кольцо: натяжение $\vec{T}$ вдоль $\vec{e}$ (нить тянет к муфте) и реакция проволоки $\vec{N}$. Проволока гладкая, поэтому $\vec{N}$ перпендикулярна $\vec{\tau}$, то есть направлена по нормали. Проекция на $\vec{\tau}$ убирает неизвестную N:

$$ma_\tau = T\cos\beta,$$

$$T = \frac{ma_\tau}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos^2\beta}\left(\frac{u^2}{l} - \frac{v^2}{R}\sin\beta\right) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}0096}{0{,}64} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Знак «плюс»: нить натянута и тянет кольцо к муфте.



Силы на кольцо, вид сверху. Длина стрелки T увеличена: в действительности $T \approx 1{,}5$ мН, а $N \approx 29$ мН.

Обратите внимание. 1) Скорость муфты постоянна: именно поэтому её система отсчёта инерциальна и ускорение кольца вдоль нити равно u^2/l — через неподвижную точку, а не через сложное вращение. 2) Нормальную реакцию проволоки искать не нужно: проекцией на касательную она исключена.

Проверка. Размерность: $m \cdot (\text{м}^2/\text{с}^2)/\text{м} = \text{Н}$. Второй способ, численный: задать движение муфты $x = x_0 + Vt$, найти положение кольца на дуге из условия, что расстояние до муфты равно l, и продифференцировать дважды. Расчёт на python даёт $v = 0{,}7500$ м/с, $a_\tau = 0{,}0120$ м/с^2 и $T = 1{,}50 \cdot 10^{-3}$ Н. Условие $T > 0$ выполнено: нить натянута. Смысл: центростремительное ускорение по дуге $v^2/R \approx 0{,}30$ м/с^2 создаёт почти целиком проволока ($N \approx 29$ мН), нить вносит лишь малую добавку $T \sin\beta \approx 0{,}9$ мН и тянет кольцо вперёд вдоль дуги с силой $T\cos\beta$.

Ответ. 1) $v = 75$ см/с; 2) $u = 77$ см/с (перпендикулярно нити); 3) $T \approx 1{,}5$ мН.