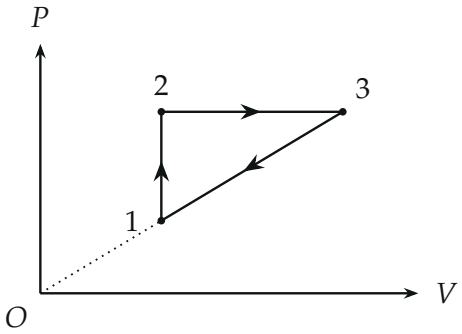
Цикл из изохоры, изобары и прямой

Задача 2. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 2] Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изохоры, изобары и участка прямо пропорциональной зависимости давления P от объёма V (см. рис.). Рабочее вещество — одноатомный идеальный газ.

1. Найти отношение молярных теплоёмкостей на тех участках цикла, где происходило повышение температуры газа.
2. Найти в изобарном процессе отношение количества теплоты, полученной газом, к работе газа.
3. Найти предельно возможное максимальное значение КПД такого цикла.



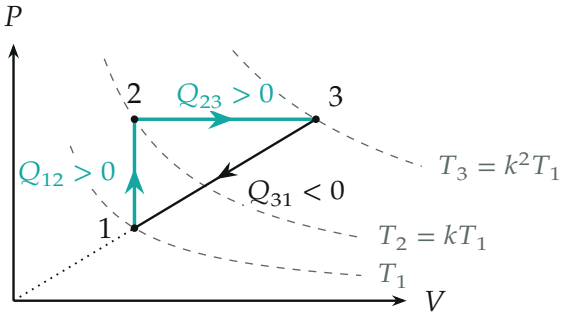
▲ **Решение. Что происходит.** Газ проходит три процесса: изохору $1 \to 2$, изобару $2 \to 3$ и участок прямой $3 \to 1$, которая, будучи продолжена, проходит через начало координат ($P = aV$). Форма цикла задаётся одним числом: отношением давлений $k = P_2/P_1 > 1$. Это тепловая машина (цикл идёт по часовой стрелке), и её КПД зависит только от k. Опорные законы: уравнение Менделеева — Клапейрона $PV = \nu RT$ (по нему видно, где растёт температура), первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$ и внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$.

Обозначения. ν — число молей, $C = Q/(\nu\Delta T)$ — молярная теплоёмкость процесса, A — работа газа, Q_{ij} — теплота на участке $i \to j$. Состояния: 1 (P_1, V_1), 2 (kP_1, V_1), 3 (kP_1, kV_1); точка 3 получена из условия,

что прямая $3 \to 1$ проходит через начало координат: $P_3/V_3 = P_1/V_1$, откуда $V_3 = kV_1$.

Пункт 1.

1. Где растёт температура. Из $PV = \nu RT$ имеем $T \propto PV$. На изохоре $1 \to 2$ давление растёт при постоянном объёме, T растёт. На изобаре $2 \to 3$ растёт объём при постоянном давлении, T растёт. На участке $3 \to 1$ давление пропорционально объёму, $P = aV$, поэтому $T \propto V^2$, а объём уменьшается — температура падает на всём участке. Повышение температуры — на $1 \to 2$ и $2 \to 3$ (отношение температур в вершинах $T_2 = kT_1$, $T_3 = k^2T_1$).



Изотермы $PV = \text{const}$ через вершины цикла: температура растёт вдоль $1 \to 2 \to 3$ (бирюзовые участки) и падает вдоль $3 \to 1$.

2. Теплоёмкости на этих участках. Определение: $C = Q/(\nu\Delta T)$. Изохора: объём не меняется, $A = 0$, по первому началу $Q = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$, значит $C_{12} = C_V = \frac{3}{2}R$. Изобара: $Q = \Delta U + P\Delta V$, а из уравнения состояния при $P = \text{const}$ имеем $P\Delta V = \nu R\,\Delta T$, поэтому $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \nu R\Delta T$ и $C_{23} = C_P = \frac{5}{2}R$. Отношение:

$$\frac{C_{12}}{C_{23}} = \frac{3R/2}{5R/2} = \frac{3}{5}.$$

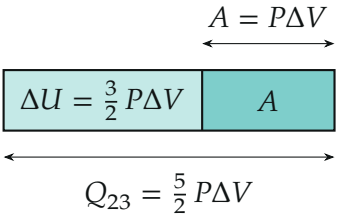
Пункт 2.

3. Теплота и работа в изобарном процессе. Работа газа при $P = \text{const}$: $A_{23} = P\Delta V = \nu R\,\Delta T$. Теплота, полученная газом, по первому

началу: $Q_{23} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$. Отношение:

$$\frac{Q_{23}}{A_{23}} = \frac{\frac{5}{2}\nu R\Delta T}{\nu R\Delta T} = \frac{5}{2}.$$

Из каждых 5 единиц теплоты 2 единицы идут на работу, а 3 — на нагрев газа.



Куда идёт теплота изобарного расширения: 3/5 *на нагрев,* 2/5 *на работу.*

Пункт 3.

4. КПД как функция k**.** Полезная работа за цикл — площадь треугольника 123, катеты $(k-1)P_1$ и $(k-1)V_1$:

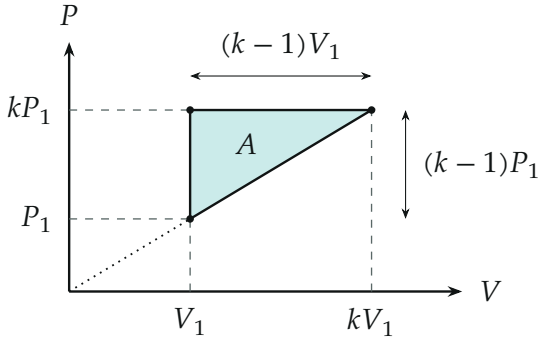
$$A = \tfrac{1}{2}(k-1)^2 P_1 V_1.$$

Теплота, полученная газом за цикл, — на тех участках, где газ нагревается (пункт 1). На изохоре и на изобаре

$$Q_{12} = \tfrac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \tfrac{3}{2}(P_2 - P_1)V_1 = \tfrac{3}{2}(k-1)P_1V_1,$$
$$Q_{23} = \tfrac{5}{2}P_2(V_3 - V_1) = \tfrac{5}{2}k(k-1)P_1V_1.$$

На участке $3 \to 1$ газ теплоту отдаёт: из $dU = \frac{3}{2}d(aV^2) = 3aV\,dV$ и $P\,dV = aV\,dV$ следует $dQ = dU + P\,dV = 4aV\,dV < 0$ при $dV < 0$. Значит

$$Q_{\text{получ}} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{(k-1)(5k+3)}{2}P_1V_1, \qquad \eta = \frac{A}{Q_{\text{получ}}} = \frac{k-1}{5k+3}.$$

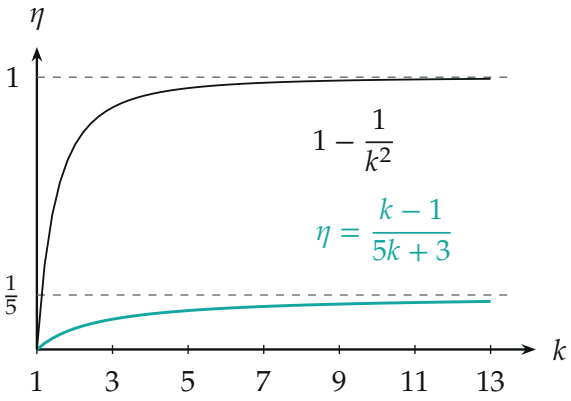


Работа за цикл — площадь треугольника 123 *(бирюзовый).*

5. Предельный КПД. Параметр $k > 1$ любой: форму цикла выбирает конструктор, и $\eta(k) = \dfrac{k-1}{5k+3}$ растёт с k (производная $\dfrac{8}{(5k+3)^2} > 0$). При $k \to \infty$:

$$\eta_{\max} = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{5k+3} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

Это верхняя граница, к которой КПД подходит, но которой не достигает ни при каком конечном k (при $k = 2$ он равен 7,7%, при $k = 5$ — 14,3%, при $k = 50$ — 19,4%).



КПД цикла (бирюзовая кривая) растёт с k *и стремится к* $1/5$*; чёрная кривая — КПД цикла Карно для крайних температур* $1 - T_1/T_3 = 1 - 1/k^2$ *(верхняя граница любого цикла между ними).*

Обратите внимание. 1) Теплоёмкость «на участке цикла» — это теплоёмкость процесса, а не C_V или C_P вообще: участок $3 \to 1$ имеет свою, $C = 2R$, но на нём газ остывает, и в вопросе пункта 1 он не участвует. 2) В $Q_{\text{получ}}$ входят только участки, где $dQ > 0$; на $3 \to 1$ теплота отдаётся, и в знаменатель КПД она не входит.

Проверка. Размерность: η, C_{12}/C_{23}, Q/A безразмерны. Второй способ — баланс теплоты. Отданная теплота ($C = 2R$ на участке $3 \to 1$): $|Q_{31}| = 2\nu R(T_3 - T_1) = 2(k^2-1)P_1V_1$, и

$$\begin{aligned} Q_{\text{получ}} - |Q_{31}| &= \tfrac{1}{2}(k-1)(5k+3)P_1V_1 - 2(k^2-1)P_1V_1 \\ &= \tfrac{1}{2}(k-1)^2 P_1V_1 = A, \end{aligned}$$

что совпадает с площадью цикла. Численное интегрирование $dQ = dU + P\,dV$ вдоль всего цикла на python даёт $\eta = 0{,}0967$ при $k = 2{,}5$ и $0{,}19997$ при $k = 10^4$, как по формуле. Предел: $\eta < 1 - 1/k^2 < 1$ при любом k, второе начало не нарушено. Смысл: чем сильнее вытянут цикл, тем меньшая доля теплоты нужна на работу, но почти всё идёт на нагрев газа по изохоре и изобаре, и работой может стать не больше пятой части.

Ответ. 1) $C_{12}/C_{23} = 3/5$; 2) $Q_{23}/A_{23} = 5/2$; 3) $\eta_{\max} = 1/5 = 20\%$ (при $k = P_2/P_1 \to \infty$).