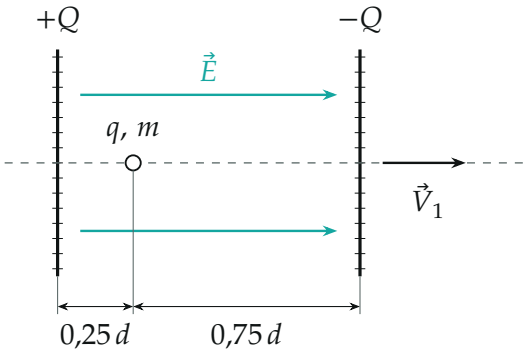
Частица и конденсатор из сеток

Задача 3. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 3] Обкладки конденсатора — круглые металлические сетки площадью S, расстояние между обкладками d ($d \ll \sqrt{S}$). Из точки, находящейся между обкладками на оси симметрии на расстоянии $0{,}25\,d$ от положительно заряженной обкладки, стартует с нулевой начальной скоростью положительно заряженная частица и через время T вылетает из конденсатора перпендикулярно обкладкам. Удельный заряд частицы $q/m = \gamma$. Система находится в вакууме.

1. Найдите скорость V_1 частицы при вылете из конденсатора.
2. Найдите величину Q заряда обкладок конденсатора.
3. С какой скоростью V_2 будет двигаться частица на бесконечно большом расстоянии от конденсатора?

При движении частицы электрическое поле, созданное зарядами конденсатора, считать неизменным, а электрическое поле внутри конденсатора вблизи оси симметрии считать однородным.



Поясняющий рисунок: частица стартует из точки на оси на расстоянии $0{,}25\,d$ от положительной обкладки и летит к отрицательной.

▲ **Решение. Что происходит.** Внутри плоского конденсатора поле однородно, поэтому на частицу действует постоянная сила, и она движется равноускоренно: путь $0{,}75\,d$ за время T из состояния покоя даёт ускорение, а с ним и скорость вылета и поле. Заряд обкладок найдём из поля плоского конденсатора. Скорость вдали — вопрос о работе поля вне

конденсатора: оно там не равно нулю, и работу удобно считать через потенциалы, а точку отсчёта потенциала связать с симметрией конденсатора.

Обозначения. E — напряжённость поля внутри конденсатора, a — ускорение частицы, $U = Ed$ — напряжение между обкладками, ε_0 — электрическая постоянная, φ — потенциал (на бесконечности $\varphi_\infty = 0$). Ось x направим от положительной обкладки к отрицательной, начало — на положительной обкладке.

Пункт 1.

1. Ускорение. Поле однородно, значит, сила qE постоянна и $a = qE/m = \gamma E$ тоже постоянно: движение равноускоренное без начальной скорости. Частица проходит расстояние $d - 0{,}25\,d = 0{,}75\,d$ за время T:

$$0{,}75\,d = \frac{aT^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3d}{2T^2}.$$

2. Скорость при вылете.

$$V_1 = aT = \frac{3d}{2T}.$$

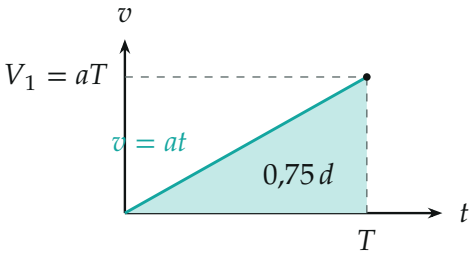


График скорости: площадь под ним равна пройденному пути $0{,}75\,d$.

Второй способ: средняя скорость при равноускоренном движении из покоя равна $V_1/2$, поэтому путь равен $\frac{V_1}{2}\,T = 0{,}75\,d$, и $V_1 = \frac{3d}{2T}$.

Пункт 2.

3. Напряжённость поля. Ускорение связано с полем: $a = \gamma E$, отсюда

$$E = \frac{a}{\gamma} = \frac{3d}{2\gamma T^2}.$$

4. Заряд обкладок. Поле плоского конденсатора с зарядами $\pm Q$ на обкладках площадью S при $d \ll \sqrt{S}$ (краевыми эффектами пренебрегаем): $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0 S)$. Тогда

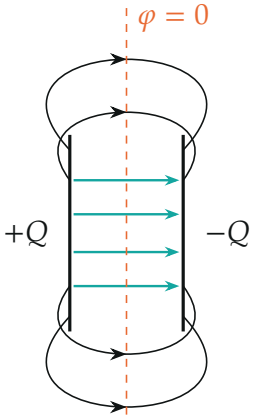
$$Q = \varepsilon_0 SE = \frac{3\varepsilon_0 Sd}{2\gamma T^2}.$$

Пункт 3.

5. Что нужно знать о потенциале. Скорость вдали найдём из закона сохранения энергии для частицы в электростатическом поле: $\frac{mV_2^2}{2} + q\varphi_\infty = q\varphi_{\text{старт}}$ (поле не меняется со временем, других сил нет). Значит, нужна разность потенциалов между точкой старта и бесконечностью. Внутри конденсатора φ меняется линейно: разность потенциалов между положительной и отрицательной обкладками равна $U = Ed$, а между стартом и серединой конденсатора — $E\,(d/2 - 0{,}25\,d) = U/4$. Остаётся связать середину конденсатора с бесконечностью.

6. Симметрия. Две одинаковые обкладки несут заряды $+Q$ и $-Q$ и расположены симметрично относительно срединной плоскости. Отразим систему в этой плоскости: обкладки поменяются местами, и заряд в каждой точке сменит знак. Потенциал при этом тоже меняет знак: $\varphi(\text{точка}) = -\varphi(\text{зеркальная точка})$. На самой срединной плоскости точка и её отражение — одна и та же, поэтому там $\varphi = -\varphi$, то есть $\varphi = 0$. На бесконечности потенциал по выбору нуля тоже 0. Срединная плоскость и бесконечность имеют одинаковый потенциал, и

$$\varphi_{\text{старт}} - \varphi_\infty = \varphi_{\text{старт}} - \varphi_{\text{середина}} = \frac{U}{4}.$$

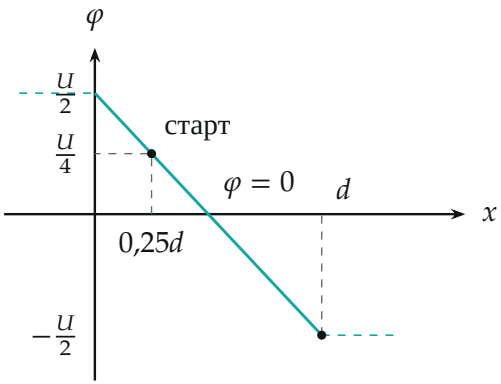


Линии поля конденсатора: внутри почти прямые, вне — замкнутые дуги. Срединная плоскость (морковный пунктир) — эквипотенциаль $\varphi = 0$, как и бесконечность.

7. Закон сохранения энергии. Кинетическая энергия вдали равна работе поля на пути от старта до бесконечности:

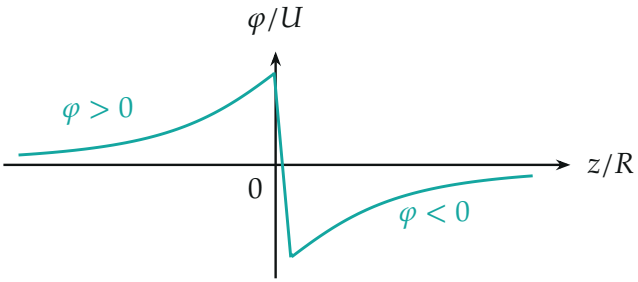
$$\frac{mV_2^2}{2} = q\,(\varphi_{\text{старт}} - \varphi_\infty) = \frac{qU}{4}, \qquad V_2^2 = \frac{\gamma U}{2} = \frac{\gamma}{2}\cdot\frac{3d^2}{2\gamma T^2} = \frac{3d^2}{4T^2},$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{d}{T} = \frac{V_1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}87\,\frac{d}{T}.$$



Потенциал на оси внутри конденсатора — линейная функция. У середины он равен нулю, как на бесконечности; у старта $U/4$, у отрицательной обкладки $-U/2$.

Обратите внимание. Вне конденсатора поле мало вблизи обкладок, но не равно нулю: на расстояниях порядка размера обкладок оно заметно, и частица за выходом ещё тормозится — её притягивает отрицательная обкладка (потенциал вне конденсатора отрицателен, и потенциальная энергия частицы $q\varphi$ растёт от $-qU/2$ до нуля при удалении). Поэтому $V_2 < V_1$, а равенство $V_2 = V_1$ было бы ошибкой.



Потенциал на оси двух дисков (радиус R, расстояние $d = 0{,}12R$): отрицателен справа от конденсатора и стремится к нулю при $z \to \infty$.

Проверка. Размерность: $V_1 \sim d/T$ — м/с; $E = d/(\gamma T^2)$ — В/м, $\varepsilon_0 SE$ — Кл. Второй способ для V_2: энергия от выхода до бесконечности. Потенциал у отрицательной обкладки $-U/2$, на бесконечности 0; частица теряет $qU/2$:

$$V_2^2 = V_1^2 - \gamma U = \frac{9d^2}{4T^2} - \frac{3d^2}{2T^2} = \frac{3d^2}{4T^2}.$$

Точный расчёт на python: для двух дисков радиуса R с зарядами $\pm Q$ потенциал на оси равен $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[f(z) - f(z-d)], f(z) = \sqrt{R^2 + z^2} - |z|$; при $d/R = 10^{-3}$ отношение $V_2/V_1 = 0{,}57735 = 1/\sqrt{3}$ — совпадает. Смысл: частица разгоняется на $3/4$ разности потенциалов между обкладками, а затем отдаёт обратно $1/2$ её, пока уходит в бесконечность.

Ответ. 1) $V_1 = \dfrac{3d}{2T}$; 2) $Q = \dfrac{3\varepsilon_0 Sd}{2\gamma T^2}$; 3) $V_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{d}{T} = \dfrac{V_1}{\sqrt{3}}$.