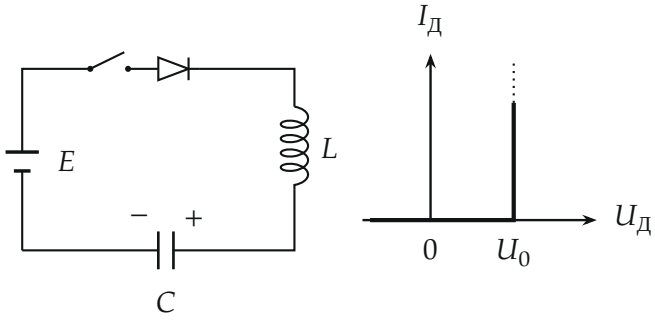
Конденсатор, катушка и диод

Задача 4. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 4] В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ разомкнут, ЭДС идеального источника $E = 9$ В, конденсатор ёмкостью $C = 40$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 5$ В, индуктивность идеальной катушки $L = 0{,}1$ Гн. Вольт-амперная характеристика диода дана на рисунке, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В. Ключ замыкают.

1. Найти скорость возрастания тока сразу после замыкания ключа.
2. Найти максимальный ток после замыкания ключа.
3. Найти установившееся напряжение U_2 на конденсаторе после замыкания ключа.



▲ **Решение. Что происходит.** Источник, ключ, диод, катушка и конденсатор образуют один последовательный контур. Диод по характеристике — «односторонний» элемент: пока ток идёт вперёд, напряжение на нём равно порогу U_0, а при меньшем напряжении тока нет. Поэтому, пока диод открыт, в цепи происходят обычные LC-колебания, но вместо E в них действует $E - U_0$. Обратно ток диод не пропустит, поэтому колебание оборвётся на половине периода, когда ток дойдёт до нуля, и конденсатор останется заряженным. Сначала выясним, откроется ли диод, затем найдём ток и напряжение из второго правила Кирхгофа и закона сохранения энергии.

Обозначения. I — ток в контуре (по часовой стрелке: от плюса источника через диод и катушку к плюсовой пластине конденсатора, так что

конденсатор подзаряжается), U_C — напряжение на конденсаторе, $U_Д$ — напряжение на диоде, $U_L = L\,dI/dt$ — напряжение на катушке по ходу тока.

Пункт 1.

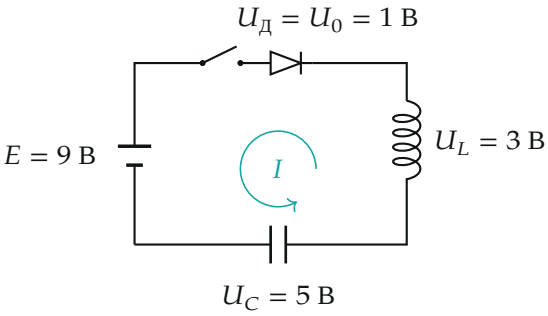
1. Начальные условия. Катушка не пускает ток скачком: сразу после замыкания $I = 0$. Заряд конденсатора скачком тоже не меняется (для этого нужен бесконечный ток), поэтому $U_C = U_1 = 5$ В. Если бы диод был закрыт, на нём было бы всё напряжение $E - U_1 = 4$ В — больше порога $U_0 = 1$ В, а закрытый диод такого напряжения не выдерживает. Значит, диод открывается сразу, и на нём устанавливается $U_Д = U_0$.

2. Второе правило Кирхгофа. Обход по току: источник создаёт E, а $U_Д$, U_L и U_C — падения напряжений:

$$E = U_Д + L\frac{dI}{dt} + U_C.$$

В момент $t = 0$ при $U_Д = U_0$, $U_C = U_1$:

$$L\frac{dI}{dt} = E - U_0 - U_1, \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{9 - 1 - 5}{0{,}1} = 30 \text{ А/с}.$$



Напряжения сразу после замыкания (в вольтах): $9 = 1 + 3 + 5$. *Ток ещё нулевой.*

Пункт 2.

3. Когда ток максимален. Ток растёт, пока $U_L = E - U_0 - U_C > 0$; максимум — при $dI/dt = 0$, то есть при

$$U_C = E - U_0 = 8 \text{ В}.$$

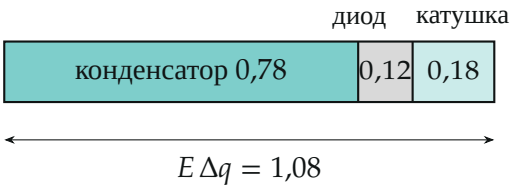
К этому моменту конденсатор зарядился с 5 до 8 В, и по цепи прошёл заряд $\Delta q = C(8-5) = 120$ мкКл.

4. Энергия. Источник совершил работу $E\,\Delta q$. Она пошла на энергию конденсатора, на тепло в диоде (при токе I на нём выделяется мощность $U_0 I$, за прошедший заряд — $U_0 \Delta q$) и на энергию катушки:

$$E\,\Delta q = \frac{C(U_C^2 - U_1^2)}{2} + U_0\,\Delta q + \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Числа: $E\Delta q = 1{,}08$ мДж, энергия конденсатора $\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 10^{-6}\cdot(64-25) = 0{,}78$ мДж, тепло $U_0\Delta q = 0{,}12$ мДж, откуда

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = 0{,}18 \text{ мДж}, \qquad I_{\max} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}18\cdot 10^{-3}}{0{,}1}} = 0{,}06 \text{ А} = 60 \text{ мА}.$$



Куда пошла работа источника к моменту максимума тока (в мДж).

5. Второй способ: колебания. Пока диод открыт, $E - U_0 = U_C + L\,dI/dt$, а ток через конденсатор $I = C\,dU_C/dt$. Для $U_C - (E - U_0)$ это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC} = 500$ с$^{-1}$. Начальное отклонение равно -3 В, начальная скорость изменения U_C

нулевая (ток 0), поэтому

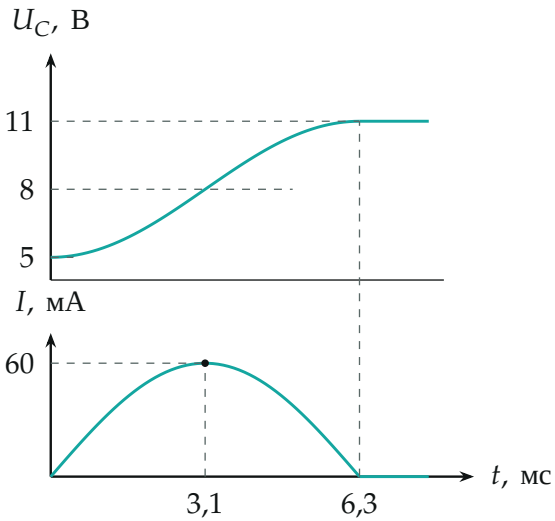
$$U_C = 8 - 3\cos\omega t, \qquad I = C\frac{dU_C}{dt} = 3\omega C \sin\omega t,$$
$$I_{\max} = 3 \cdot 500 \cdot 40 \cdot 10^{-6} = 0{,}06 \text{ А}.$$

Совпало с пунктом 2; кроме того, $dI/dt\,(0) = 3\omega^2 C = 30$ А/с, как в пункте 1.

Пункт 3.

6. Когда ток прекратится. Ток $I = 3\omega C \sin\omega t$ первый раз обращается в нуль при $\omega t = \pi$ (через $\pi/\omega \approx 6{,}3$ мс). Дальше он должен был бы сменить знак, но диод обратный ток не пропускает. В этот момент $U_C = 8 + 3 = 11$ В, на диод приложено $E - U_C = -2$ В $< U_0$ — диод закрыт и остаётся закрытым. Конденсатор отключён от источника и сохраняет заряд:

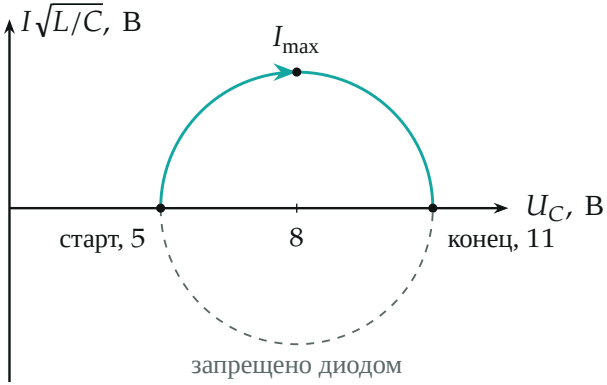
$$U_2 = 11 \text{ В}.$$



Напряжение на конденсаторе и ток после замыкания: половина колебания, затем ток нулевой, напряжение 11 В.

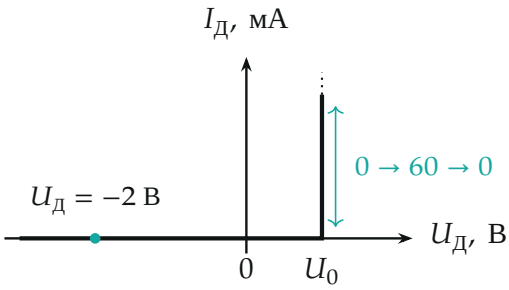
7. Второй способ: энергия за всё время. Через цепь прошёл заряд $\Delta q = C(U_2 - U_1)$; в конце ток нулевой, и энергия катушки равна нулю:

$$(E - U_0)\,C\,(U_2 - U_1) = \frac{C(U_2^2 - U_1^2)}{2} \implies U_2 + U_1 = 2(E - U_0),$$
$$U_2 = 2 \cdot 8 - 5 = 11 \text{ В}.$$



Фазовая плоскость $(U_C,\ I\sqrt{L/C})$: колебание — полуокружность радиусом 3 В с центром в 8 В. Нижняя половина запрещена диодом.

Обратите внимание. 1) Диод в начале нужно проверить: открыт ли он ($E - U_1 = 4$ В $> U_0$). Если бы U_1 было больше $E - U_0$, тока не было бы вообще. 2) Колебание не доходит до конца периода: когда ток обращается в нуль, диод запирается, и конденсатор остаётся заряженным до 11 В — больше, чем E.



Рабочая точка диода: пока идёт ток (от 0 до 60 мА и обратно), напряжение на диоде равно U_0; в конце диод закрыт при $U_Д = -2$ В.

Проверка. Размерность: $[E/L] = \text{В}/\text{Гн} = \text{А}/\text{с}$; $[\omega CU] = \text{с}^{-1} \cdot \Ф \cdot \text{В} = \text{А}$. Все три значения получены двумя способами (Кирхгоф и энергия; колебания и энергия) (на python те же числа). Смысл: контур проходит положение равновесия 8 В (там ток максимален) и останавливается на 11 В, симметрично начальным 5 В.

Ответ. 1) $dI/dt = 30$ А/с; 2) $I_{\max} = 60$ мА; 3) $U_2 = 11$ В.