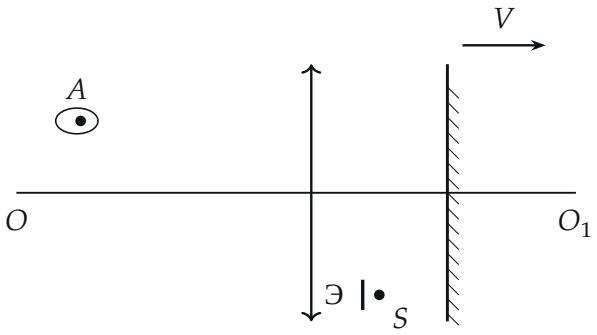
Изображение в движущемся зеркале и линзе

Задача 5. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 5] Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием F, плоского зеркала и небольшого экрана Э, расположенного так, что свет от источника S может попасть на линзу только после отражения от зеркала (см. рис.). Зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси OO_1 линзы. Источник S находится на расстоянии $3F/4$ от оси OO_1 и на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы. Линза и источник неподвижны, а зеркало движется со скоростью V вдоль оси OO_1. В некоторый момент зеркало оказалось на расстоянии F от линзы.

1. На каком расстоянии от плоскости линзы наблюдатель A сможет увидеть в этот момент изображение источника в системе?
2. Под каким углом α к оси OO_1 движется изображение в этот момент? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)
3. Найти скорость изображения в этот момент.



▲ **Решение. Что происходит.** Свет идёт от источника к зеркалу, отражается и попадает на линзу, которая строит окончательное изображение. Задача на последовательное построение изображений в двух оптических элементах: плоское зеркало даёт мнимое изображение S_1, которое для линзы служит предметом, а линза даёт действительное изображение S_2. Положение S_2 найдём по формуле тонкой линзы. Скорость

изображения — это производная по времени: зеркало сдвигает S_1 вдвое быстрее, чем движется само, а линза превращает это смещение в смещение S_2 с известным коэффициентом, продольным и поперечным.

Обозначения. Ось x направим вдоль OO_1 от линзы к зеркалу, начало — в плоскости линзы. $x_з$ — расстояние от линзы до зеркала (в момент опроса $x_з = F$), $h = 3F/4$ — высота источника над осью, S_1 — изображение S в зеркале на расстоянии d от линзы, S_2 — изображение S_1 в линзе на расстоянии f от линзы (слева).

Пункт 1.

1. Изображение в зеркале. Плоское зеркало даёт мнимое изображение, симметричное источнику относительно плоскости зеркала. Источник стоит на расстоянии $x_з - F/2 = F/2$ от зеркала, значит, S_1 — за зеркалом на том же расстоянии $F/2$. Расстояние от линзы до S_1 и его высота над осью:

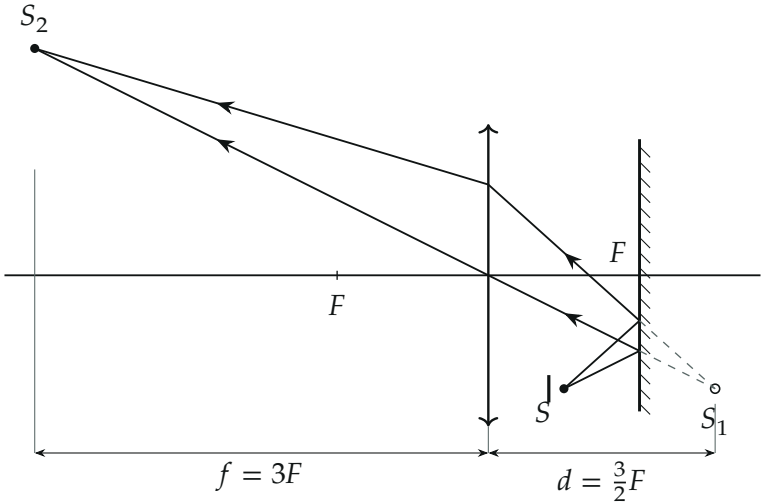
$$d = x_з + \frac{F}{2} = \frac{3F}{2}, \qquad h = \frac{3F}{4}.$$

Отражённые лучи идут так, как если бы выходили из S_1: на линзу падает расходящийся пучок, идущий справа налево, и предмет для линзы — именно S_1.

2. Формула тонкой линзы. Предмет S_1 находится дальше фокуса ($d = 1{,}5F > F$), поэтому линза даёт действительное изображение по другую сторону от себя (там, где стоит наблюдатель A):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad f = \frac{dF}{d - F} = \frac{\frac{3}{2}F \cdot F}{\frac{1}{2}F} = 3F.$$

Наблюдатель увидит изображение на расстоянии $3F$ от плоскости линзы (если он дальше, лучи после изображения расходятся и попадают ему в глаз). Увеличение $\Gamma = f/d = 2$, высота изображения $2h = 3F/2$ над осью — с другой стороны от оси, чем источник: изображение перевёрнуто.



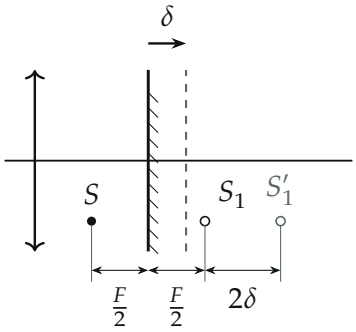
Построение: лучи от S отражаются от зеркала (продолжения за зеркалом, пунктир, сходятся в S_1), затем собираются линзой в S_2. Луч через центр линзы не преломляется.

Пункт 2.

3. Как движется S_1. Зеркало сместилось на δ — расстояние от источника до зеркала выросло на δ, а изображение S_1 стоит за зеркалом на таком же расстоянии, поэтому оно удалилось от источника на 2δ и от линзы тоже:

$$d = x_з + (x_з - \tfrac{F}{2}) = 2x_з - \frac{F}{2}, \qquad \dot{d} = 2V.$$

Высота S_1 над осью не меняется: $h = 3F/4$.



Сдвиг зеркала на δ (сплошная линия → пунктир) сдвигает S_1 на 2δ ($S_1 \to S_1'$). Скорость S_1 равна $2V$.

4. Продольная скорость изображения. Подставим $f = dF/(d-F)$ и продифференцируем по времени:

$$\dot f = -\frac{F^2}{(d-F)^2}\,\dot d = -\frac{F^2}{(F/2)^2}\cdot 2V = -8V.$$

Знак «минус»: расстояние f уменьшается, изображение S_2 приближается к линзе вдоль оси со скоростью $v_x = 8V$ (в сторону движения зеркала). Тот же результат даёт квадрат увеличения: $\Gamma^2\dot d = 4\cdot 2V$.

5. Поперечная скорость изображения. Высота изображения над осью $y = hf/d = \dfrac{hF}{d-F}$ при постоянной h:

$$\dot y = -\frac{hF}{(d-F)^2}\,\dot d = -\frac{\frac{3}{4}F\cdot F}{(F/2)^2}\cdot 2V = -6V.$$

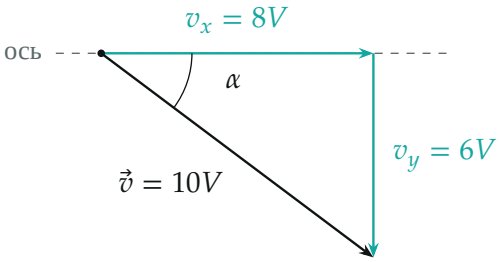
Высота уменьшается: изображение приближается к оси со скоростью $v_y = 6V$.

Пункт 3.

6. Направление и скорость. Скорость изображения составлена из двух перпендикулярных составляющих, вдоль оси ($8V$) и к оси ($6V$):

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6V}{8V} = \frac{3}{4}, \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{64+36}\ V = 10\,V.$$

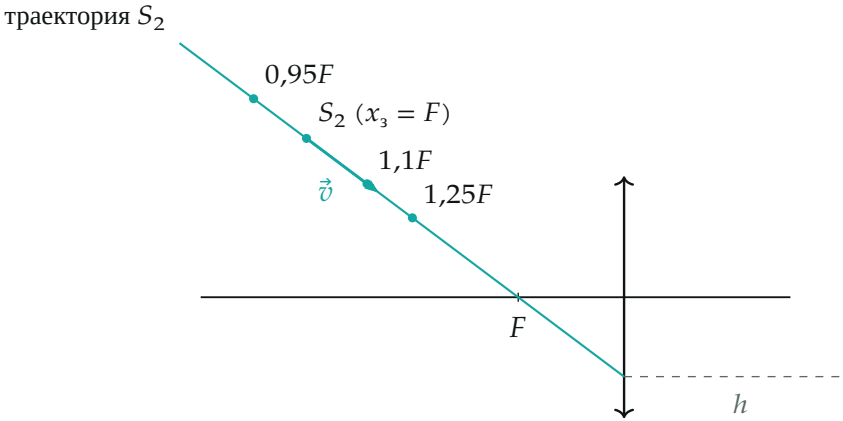


Скорость изображения: $v_x = 8V$ вдоль оси (к линзе) и $v_y = 6V$ (к оси).

7. Второй способ для направления. Изображение точки, которая движется параллельно оси на высоте h над ней, лежит на преломлённом луче, который шёл параллельно оси, то есть на прямой через задний фокус линзы. Для S_1, движущегося вдоль прямой $y = h$, это прямая, проходящая через точку $(-F, 0)$ и точку на линзе на высоте h; её наклон к оси

$$\tan\alpha = \frac{h}{F} = \frac{3F/4}{F} = \frac{3}{4}.$$

Совпало с пунктом 6.



Положения изображения S_2 (бирюзовые точки) при положениях зеркала $x_з = 0{,}95F$; F; $1{,}1F$; $1{,}25F$ лежат на одной прямой: на преломлённом луче, который шёл параллельно оси на высоте h (пунктир) и проходит через задний фокус. Изображение движется по ней к линзе.

Обратите внимание. 1) Скорость изображения в зеркале равна $2V$, а не V: смещение источника относительно зеркала удваивается. 2) У изображения в линзе продольная и поперечная скорости разные: продольная — в $\Gamma^2 = 4$ раза больше скорости предмета ($8V = 4 \cdot 2V$), поперечная получается из $\dot{y} = -\dfrac{hF}{(d-F)^2}\dot{d}$; поэтому изображение движется не вдоль оси, а наклонно, под углом α.

Проверка. Размерность: f и F — длины; $\dot{f}, \dot{y}$ — скорости. Численное дифференцирование на python (смещение зеркала на малый шаг, пере-

счёт d, f, y) даёт $8{,}000\ V$ и $6{,}000\ V$ на единицу скорости зеркала. Предел: при $x_3 \to \infty$ имеем $d \to \infty$, изображение стремится к заднему фокусу, и $\dot{f} \approx -2V(F/d)^2 \to 0$ — как и должно быть. Смысл: зеркало с постоянной скоростью двигает S_1 равномерно, а изображение в линзе движется с ускорением, и при d, близком к F, его скорость быстро растёт.

Ответ. 1) на расстоянии $3F$ от плоскости линзы (со стороны наблюдателя A); 2) $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ ($\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$), изображение движется к линзе и к оси; 3) $v = 10\ V$.