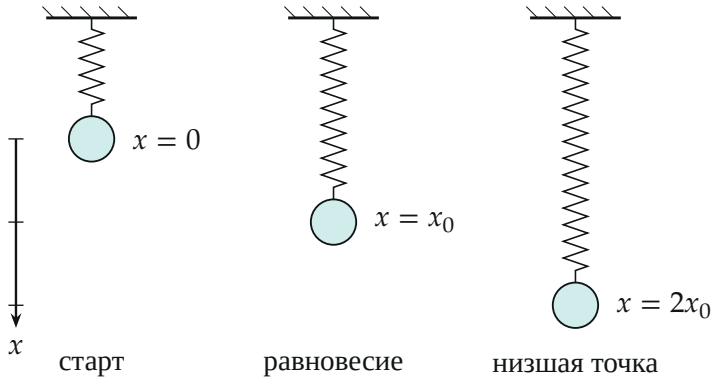
Шарик на пружине: равные ускорения

Задача 1. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 1] Шарик подвешен в поле тяжести на лёгкой упругой пружине с неизвестной жёсткостью. Шарик поднимают вверх до положения, когда пружина не деформирована, и отпускают. При дальнейшем движении шарика вдоль вертикали в некоторые моменты времени силы, действующие на шарик со стороны пружины, отличаются в 2 раза, а модули ускорений равны.

1. Найти модуль ускорения в эти моменты.
2. Найти отношение кинетических энергий шарика в эти моменты.
3. Найти отношение максимальной энергии деформации пружины к максимальной кинетической энергии шарика.



Поясняющий рисунок: три положения шарика на пружине — в момент пуска (пружина не растянута), в положении равновесия и в самой нижней точке. Ось x направлена вниз.

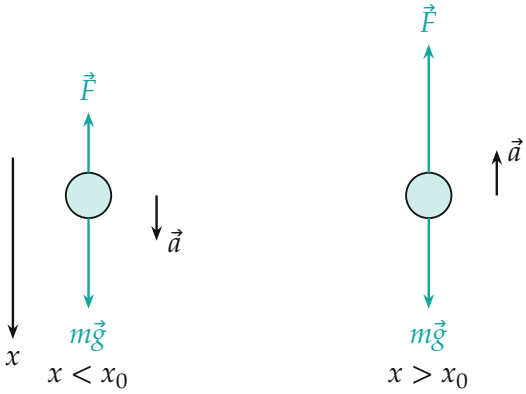
▲ **Решение. Что происходит.** Шарик отпущен без скорости при нерастянутой пружине, поэтому в начале на него действует одна сила тяжести, и он идёт вниз. Пружина растягивается, её сила растёт, и на положении равновесия сила пружины уравновешивает тяжесть. Дальше шарик по инерции идёт ниже, пружина тянет его вверх сильнее, чем тяжесть тянет вниз, и движение замедляется. Это колебания груза на пружине. Ключевых законов два: второй закон Ньютона даёт ускорение, закон сохранения энергии даёт скорость.

Обозначения. Ось x направим вниз, начало отсчёта — положение шарика при нерастянутой пружине (оттуда он отпущен: $x = 0$, $v = 0$). Тогда x — ещё и удлинение пружины. Пусть k — жёсткость пружины, $x_0 = mg/k$ — положение равновесия.

1. Ускорение шарика в произвольном месте. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на ось x. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вниз, сила пружины $\vec{F}$ вверх, пока пружина растянута ($x > 0$); что шарик выше точки $x = 0$ не поднимается, видно из ответа ниже:

$$ma = mg - kx, \qquad a = g - \frac{kx}{m} = -\frac{k}{m}(x - x_0).$$

Это уравнение гармонических колебаний с центром x_0. Шарик начал с нулевой скоростью в точке $x = 0$, то есть на расстоянии x_0 от центра, поэтому амплитуда равна x_0 и шарик ходит между $x = 0$ и $x = 2x_0$. Пружина всё время растянута, и её сила $F = kx$ всегда направлена вверх.



Силы на шарик: выше положения равновесия ($F < mg$) ускорение направлено вниз, ниже ($F > mg$) — вверх. Длины стрелок — для $x = 0{,}5x_0$ и $x = 1{,}5x_0$.

2. Два положения и условия задачи. Ускорение $a(x)$ — линейная функция координаты. Равные модули при разных положениях означают противоположные знаки, ведь равные ускорения давали бы одну и ту же точку. Пусть x_2 — верхнее из двух положений, x_1 — нижнее. Из

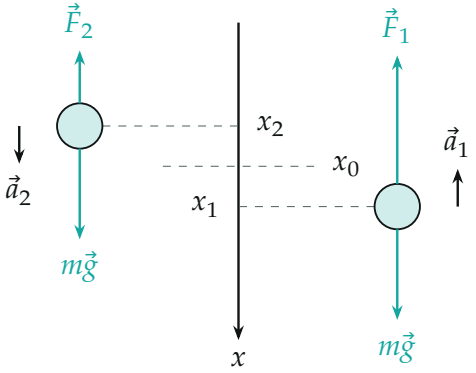
$a(x_1) = -a(x_2)$:

$$g - \frac{kx_1}{m} = -g + \frac{kx_2}{m} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 2x_0.$$

Положения симметричны относительно равновесия. Силы пружины в них kx_1 и kx_2, оба направлены вверх, поэтому условие «отличаются в 2 раза» означает $kx_1 = 2kx_2$. Обратите внимание: знак здесь не нужен, пружина всё время растянута, и обе силы смотрят вверх.

Подставим $x_1 = 2x_2$ в $x_1 + x_2 = 2x_0$: $3x_2 = 2x_0$,

$$x_2 = \frac{2}{3}x_0, \qquad x_1 = \frac{4}{3}x_0.$$



Два момента из условия: $F_1 = 2F_2$, ускорения a_1 и a_2 равны по модулю и противоположны по направлению. Положения x_2 и x_1 лежат на одинаковом расстоянии $x_0/3$ от x_0.

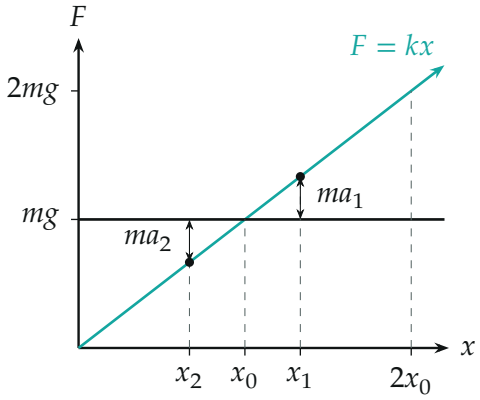
Пункт 1. Подставим x_2 в формулу ускорения:

$$a_2 = g - \frac{k}{m} \cdot \frac{2}{3}x_0 = g - \frac{2}{3}g = \frac{g}{3}, \qquad a_1 = g - \frac{4}{3}g = -\frac{g}{3}.$$

Модуль ускорения в обоих положениях

$$|a| = \frac{g}{3}.$$

В верхнем положении ускорение направлено вниз, в нижнем — вверх.



Сила пружины $F = kx$ и сила тяжести mg как функции положения. Вертикальный отрезок между прямой и горизонталью — это ma; в точках x_2 и x_1 он одинаков по длине, но направлен в разные стороны, а $F(x_1) = 2F(x_2)$.

3. Кинетическая энергия в произвольном месте. Запишем закон сохранения энергии для системы «шарик + пружина» между начальным положением $x = 0$ (скорость нулевая, пружина не деформирована) и положением x, пользуясь тем, что пружина лёгкая, а работу тяжести удобно считать по смещению x:

$$mgx = \frac{kx^2}{2} + E_k \quad \Rightarrow \quad E_k = mgx - \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2}\,x\,(2x_0 - x).$$

Здесь использовано $mg = kx_0$. Запишем тот же результат через отклонение от центра x_0:

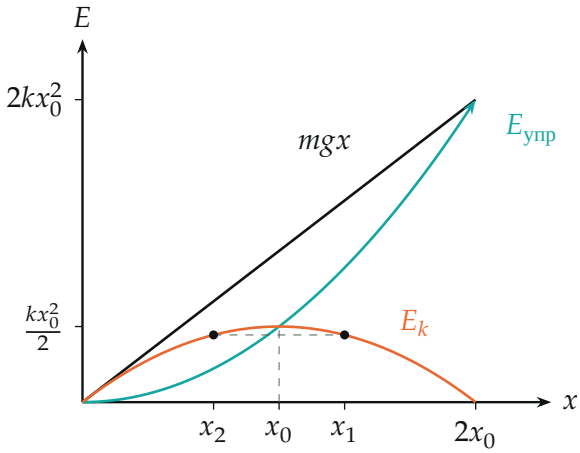
$$E_k = \frac{k}{2}\bigl(x_0^2 - (x - x_0)^2\bigr).$$

Кинетическая энергия зависит только от модуля $|x - x_0|$. Положения x_1 и x_2 отличаются от x_0 на $x_0/3$, поэтому энергии равны. Прямой счёт даёт то же:

$$E_{k2} = \frac{k}{2}\cdot\frac{2}{3}x_0\cdot\frac{4}{3}x_0 = \frac{4}{9}\,kx_0^2, \qquad E_{k1} = \frac{k}{2}\cdot\frac{4}{3}x_0\cdot\frac{2}{3}x_0 = \frac{4}{9}\,kx_0^2.$$

Пункт 2.

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = 1.$$



Энергии как функции положения: работа силы тяжести mgx (прямая), энергия пружины $kx^2/2$ (бирюзовая парабола) и кинетическая энергия (морковная парабола, разность первых двух).

4. Максимумы. Энергия деформации пружины $kx^2/2$ растёт с x, поэтому она наибольшая в нижней точке $x = 2x_0$:

$$E_{\text{упр max}} = \frac{k(2x_0)^2}{2} = 2kx_0^2.$$

Кинетическая энергия по пункту 3 наибольшая при $x = x_0$, где сила тяжести уравновешена и скорость максимальна:

$$E_{k\ \text{max}} = \frac{k}{2}x_0^2.$$

Пункт 3.

$$\frac{E_{\text{упр max}}}{E_{k\ \text{max}}} = \frac{2kx_0^2}{kx_0^2/2} = 4.$$

Проверка. Размерность: $a = g/3$ — ускорение, остальные ответы — отношения энергий. Второй способ для последнего пункта: в нижней точке скорость нулевая, вся работа тяжести $mg \cdot 2x_0 = 2kx_0^2$ ушла в пружину — то же число. Для кинетической энергии: при $x = x_0$ работа тяжести kx_0^2 минус энергия пружины $kx_0^2/2$ даёт $kx_0^2/2$. Численное интегрирование уравнения $\ddot{x} = g - kx/m$ подтвердило: $F_1/F_2 = 2{,}000$, $a = \pm 0{,}3333\,g$, отношение E_k равно 1,000, отношение максимумов 4,000. Физический смысл: шарик колеблется симметрично относительно равновесия, поэтому условие на силы («в 2 раза») сразу задаёт положения $x_0 \mp x_0/3$, а симметричные положения дают равные E_k.

Ответ. 1) $|a| = \dfrac{g}{3}$; 2) $\dfrac{E_{k1}}{E_{k2}} = 1$; 3) $\dfrac{E_{\text{упр max}}}{E_{k\ \text{max}}} = 4$.