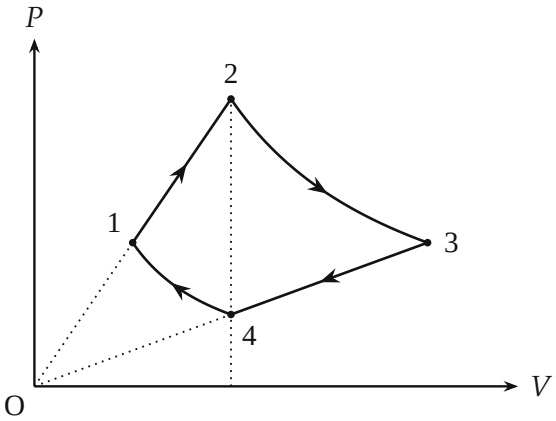
Цикл с прямой пропорциональностью и изотермами

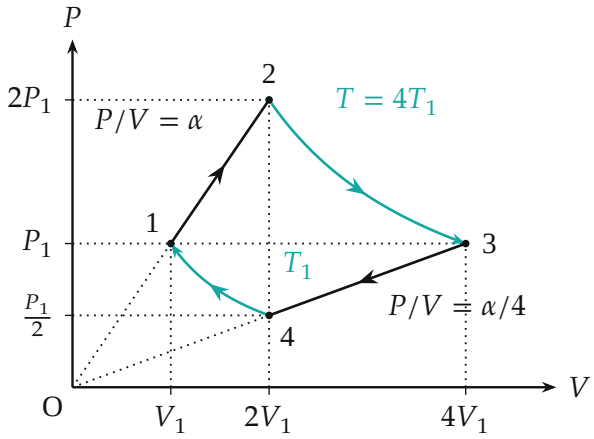
Задача 2. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 2] Идеальный одноатомный газ из состояния 1 с температурой T_1 расширяется в процессе 1–2 прямо пропорциональной зависимости давления P от объёма V. В процессе 1–2 давление увеличивается в $k = 2$ раза. Затем газ расширяется в изотермическом процессе 2–3, сжимается в процессе 3–4 прямо пропорциональной зависимости давления от объёма и сжимается в изотермическом процессе 4–1. Объёмы газа в состояниях 2 и 4 равны.



1. Найти температуру газа в процессе 2–3.
2. Найти отношение давлений в состояниях 1 и 3.
3. Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2.

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл составлен из двух изотерм и двух прямых, лежащих на лучах из начала координат плоскости P–V. На луче отношение P/V постоянно, а из уравнения состояния $PV = \nu RT$ следует, что температура на нём растёт как квадрат объёма: $T \propto V^2$. На изотерме постоянно произведение PV. Главная идея — выразить все состояния через P_1, V_1, T_1 и безразмерное k, используя эти два свойства. Молярную теплоёмкость найдём из первого начала термодинамики для малого шага на прямой 1–2.

Обозначения. ν — число молей газа, P_1, V_1, T_1 — давление, объём и температура в состоянии 1; индексы 2, 3, 4 — те же величины в остальных состояниях.



Цикл в координатах P–V с вычисленными координатами: бирюзовые дуги — изотермы (2–3 при $4T_1$, 4–1 при T_1), чёрные прямые — процессы $P/V = \text{const}$; $\alpha = P_1/V_1$.

1. Состояние 2 и температура на изотерме 2–3. Процесс 1–2 — прямая через начало координат: $P = \alpha V$, и P/V не меняется. Раз давление выросло в k раз, то и объём тоже: $P_2 = kP_1$, $V_2 = kV_1$. По уравнению Менделеева — Клапейрона для состояний 1 и 2

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = k^2, \qquad T_2 = k^2T_1 = 4T_1.$$

Процесс 2–3 изотермический, поэтому температура на нём постоянна и равна T_2.

Пункт 1. $T_{23} = k^2T_1 = 4T_1$.

2. Состояние 4. Объём в нём равен объёму состояния 2: $V_4 = V_2 = kV_1$. Изотерма 4–1: $P_4V_4 = P_1V_1$ (произведение PV постоянно), откуда

$$P_4 = \frac{P_1V_1}{kV_1} = \frac{P_1}{k} = \frac{P_1}{2}.$$

3. Состояние 3. Оно лежит на двух линиях сразу: на луче 3–4 и на изотерме 2–3. Для луча 3–4 отношение P/V то же, что в состоянии 4, для изотермы 2–3 то же PV, что в состоянии 2:

$$\frac{P_3}{V_3} = \frac{P_4}{V_4} = \frac{P_1}{k^2 V_1}, \qquad P_3 V_3 = P_2 V_2 = k^2 P_1 V_1.$$

Перемножим эти два равенства: неизвестный объём сокращается, и получаем

$$P_3^2 = P_1^2, \qquad P_3 = P_1.$$

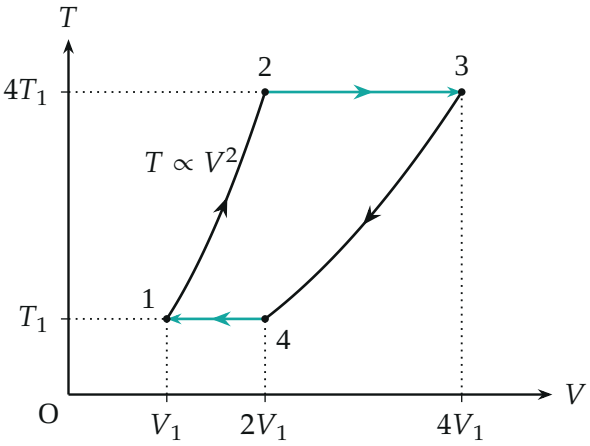
Объём найдём из второго равенства: $V_3 = k^2 V_1 = 4V_1$.

Второй способ: на луче 4–3 температура растёт как V^2, а $T_3 = T_2 = k^2 T_4$ (ведь $T_4 = T_1$), значит $V_3 = kV_4 = k^2 V_1$ и $P_3 = kP_4 = P_1$ — то же.

Пункт 2.

$$\frac{P_1}{P_3} = 1.$$

Обратите внимание: состояния 1 и 3 лежат на одной горизонтали, хотя температуры в них различаются в 4 раза — разницу берёт на себя объём.



Тот же цикл в координатах T–V: на лучах (1–2 и 3–4) температура растёт как V^2, на изотермах — горизонтали T_1 и $4T_1$.

4. Теплоёмкость на прямой 1–2: первое начало для малого шага. Молярная теплоёмкость C определена как $\delta Q = \nu C\,dT$. Газ одноатомный, $U = \frac{3}{2}\nu RT$. Запишем первое начало термодинамики для малого участка процесса 1–2:

$$\delta Q = \frac{3}{2}\nu R\,dT + P\,dV.$$

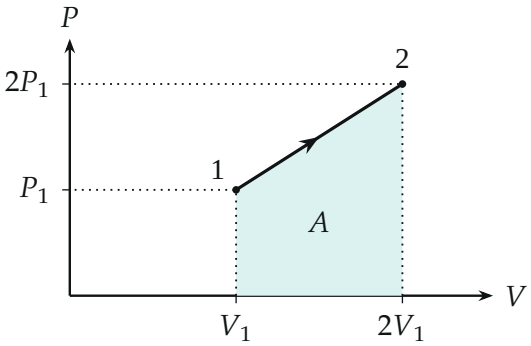
Работу $P\,dV$ выразим через dT. На прямой $P = \alpha V$, поэтому $PV = \alpha V^2 = \nu RT$; возьмём дифференциал обеих частей: $2\alpha V\,dV = \nu R\,dT$. Тогда

$$P\,dV = \alpha V\,dV = \frac{1}{2}\nu R\,dT.$$

Подставляем в первое начало:

$$\delta Q = \Big(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big)\nu R\,dT = 2\nu R\,dT, \qquad C = \frac{\delta Q}{\nu\,dT} = 2R.$$

Газ расширяется и нагревается, $\delta Q > 0$: газ в действительности получает теплоту. Теплоёмкость постоянна на всём участке, поэтому формула годится и для конечного процесса.

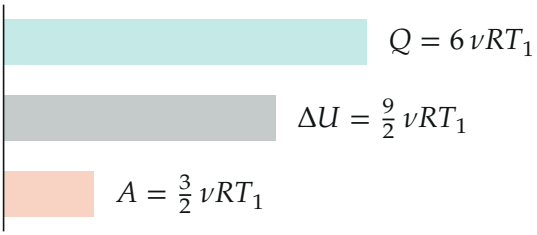


Работа газа на участке 1–2 — площадь трапеции под прямой: $A = \frac{1}{2}(P_1 + 2P_1)(2V_1 - V_1) = \frac{3}{2}P_1V_1$.

5. Второй способ: на всём участке сразу. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R \cdot 3T_1 = \frac{9}{2}\nu RT_1$. Работа газа —

площадь трапеции на рисунке: $A = \frac{3}{2} P_1 V_1 = \frac{3}{2} \nu R T_1$. Полученная теплота $Q = \Delta U + A = 6\,\nu R T_1$, откуда

$$C = \frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)} = \frac{6\,\nu R T_1}{3\,\nu T_1} = 2R.$$



Баланс на участке 1–2: теплота Q идёт на увеличение внутренней энергии ΔU и на работу газа A (длины столбиков — в одной шкале).

Пункт 3. $C_{12} = 2R$.

Проверка. Размерность: T_{23} — температура, P_1/P_3 — безразмерное, $C = 2R$ — Дж/(моль·К). Предельный смысл: на изохоре $C = \frac{3}{2}R$, на изобаре $\frac{5}{2}R$; прямая $P \propto V$ лежит между ними (расширение и нагревание вместе), и $2R$ действительно лежит между этими значениями. Численная проверка (python, $\nu = 1$, $T_1 = 300$ К): $T_2/T_1 = 4{,}00$, $P_1/P_3 = 1{,}00$, $V_3/V_1 = 4{,}00$, $C/R = 2{,}00$ — как в решении.

Ответ. 1) $T_{23} = k^2 T_1 = 4T_1$; 2) $P_1/P_3 = 1$; 3) $C_{12} = 2R$.