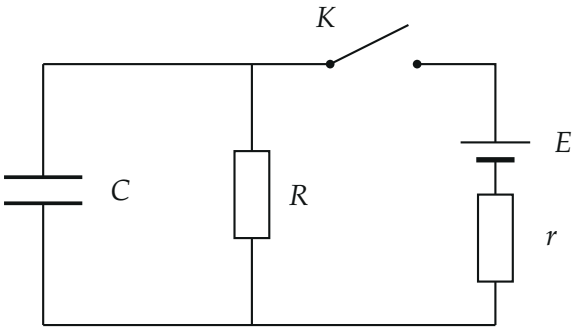
Включение и выключение RC-цепи

Задача 3. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 3] В электрической цепи (см. рис.) все элементы идеальные, конденсатор не заряжен. Величины E, R, C известны, $r = R$. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем размыкают, когда скорость роста энергии конденсатора максимальна.



1. Найти ток, текущий через конденсатор, сразу после замыкания ключа.
2. Найти ток, текущий через конденсатор, сразу после размыкания ключа.
3. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

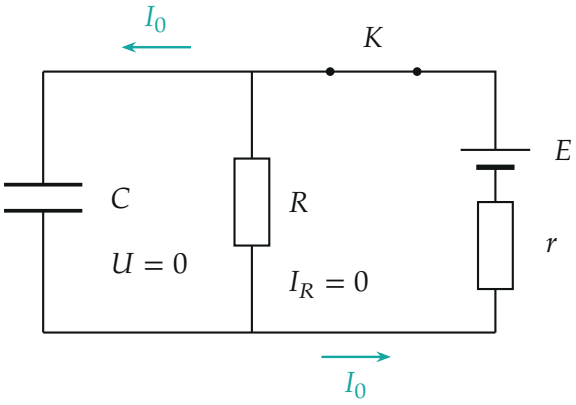
▲ **Решение. Что происходит.** Пока ключ замкнут, источник через r заряжает конденсатор, а резистор R, подключённый параллельно конденсатору, часть тока забирает себе. Заряд конденсатора скачком не меняется, поэтому в первый момент напряжение на нём нулевое и весь ток идёт в конденсатор. Затем напряжение растёт, ток зарядки падает, и мощность, идущая в конденсатор, равная $P = UI_C$, проходит через максимум: в начале $U = 0$, в конце $I_C = 0$. В этот момент ключ размыкают: остаётся замкнутый контур «конденсатор + R», и вся энергия конденсатора превращается в тепло на R. Класс задачи: цепь с конденсатором — сначала граничное условие «сразу после», затем произвольный момент, затем разряд.

Обозначения. U — напряжение на конденсаторе (оно же напряжение на R: они включены параллельно), I — ток через источник и r, $I_R = U/R$ — ток через R, I_C — ток зарядки конденсатора (в сторону его верхней, положительной обкладки). Из рисунка видно: длинная пластина источника сверху, поэтому ток идёт через ключ к узлу и вниз через R и C.

1. Сразу после замыкания ключа. Заряд конденсатора скачком не меняется, а он был нулевым, поэтому $U = 0$. Напряжение на R тоже равно нулю, значит $I_R = 0$. Весь ток источника течёт в конденсатор. Запишем закон Ома для участка «источник + r» с нулевым напряжением на параллельном блоке: $E = I_0 r$,

$$I_{C0} = I_0 = \frac{E}{r} = \frac{E}{R}.$$

Пункт 1. $I_{C0} = E/R$.



Сразу после замыкания: конденсатор не заряжен ($U = 0$), через R тока нет, весь ток $I_0 = E/r$ идёт в конденсатор.

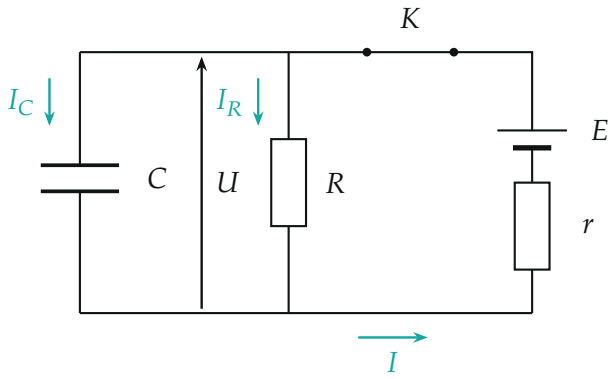
2. Произвольный момент до размыкания. Запишем правило узла для верхнего узла и закон Ома для контура «источник, r, параллельный блок»:

$$I = I_R + I_C = \frac{U}{R} + I_C, \qquad E = Ir + U.$$

Исключим I и подставим $r = R$:

$$E = R\Big(\frac{U}{R} + I_C\Big) + U = 2U + RI_C, \qquad I_C = \frac{E - 2U}{R}.$$

Качественная картина: пока $U < E/2$, ток $I_C > 0$ и напряжение растёт; чем больше U, тем меньше I_C. При $U = E/2$ ток зарядки обращается в нуль — установившееся значение, при котором R и r делят напряжение источника поровну. Значит, U растёт от 0 до $E/2$, а I_C падает от E/R до 0.



Произвольный момент: токи I, I_R, I_C в узле и напряжение U на параллельном блоке.

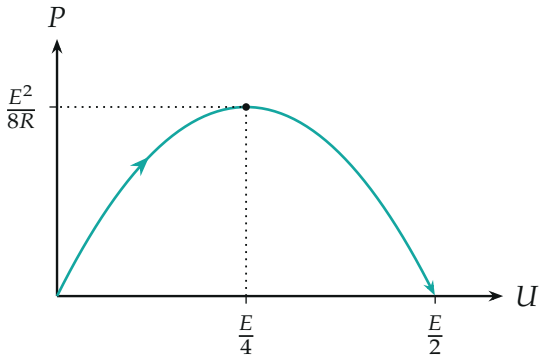
3. Момент размыкания. Энергия конденсатора $W = CU^2/2$, скорость её роста — мощность, с которой ток зарядки её пополняет: $dW/dt = CU\,dU/dt = UI_C$. Выразим через U с помощью пункта 2:

$$P = UI_C = \frac{U\,(E - 2U)}{R}.$$

Это парабола относительно U с нулями при $U = 0$ и $U = E/2$, ветви вниз; максимум — посередине между нулями, при $U_* = E/4$ (то же даёт $dP/dU = (E - 4U)/R = 0$). Поскольку U растёт монотонно от 0 до $E/2$, то значение $E/4$ достигается ровно один раз, и ключ размыкают именно

тогда. Тогда ток зарядки в этот момент

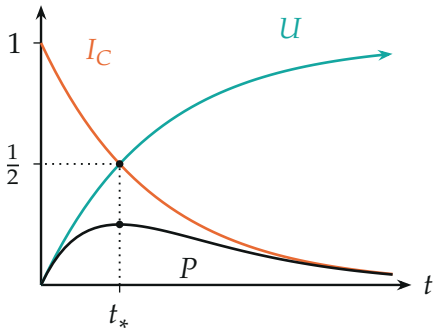
$$I_{C*} = \frac{E - 2U_*}{R} = \frac{E - E/2}{R} = \frac{E}{2R}.$$



Мощность зарядки конденсатора как функция его напряжения: парабола с нулями при $U = 0$ и $U = E/2$; U растёт со временем слева направо.

Обратите внимание: максимальна именно скорость роста энергии $P = UI_C$, а не ток и не напряжение. Ток наибольший в начале, но там $U = 0$ и энергия почти не растёт; в конце $I_C = 0$.

Для наглядности найдём и сам момент: из $C\,dU/dt = (E - 2U)/R$ получаем $U = \frac{E}{2}(1 - e^{-t/\tau})$, $I_C = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$, $\tau = \frac{RC}{2}$. Условие $U = E/4$ даёт $e^{-t_*/\tau} = 1/2$, $t_* = \tau \ln 2$; тогда $I_{C*} = E/(2R)$ — то же значение.



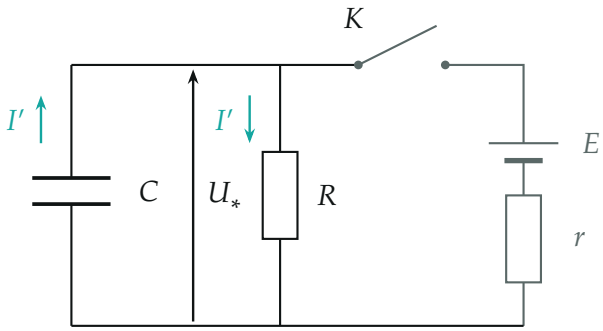
Зарядка: U растёт к $E/2$ (бирюзовая), I_C падает от E/R (морковная), мощность $P = UI_C$ (чёрная) имеет максимум при $t_* = \tau \ln 2$, где $U = E/4$, $I_C = E/(2R)$. По вертикали — доли $E/2$, E/R и $E^2/(2R)$ соответственно.

4. Сразу после размыкания ключа. Ветка с источником и r отключена. Заряд конденсатора скачком не меняется, поэтому напряжение на нём то же: $U_* = E/4$. Конденсатор оказался замкнут на резистор R, и ток через R (а значит, и через конденсатор, ведь других ветвей нет)

$$I' = \frac{U_*}{R} = \frac{E}{4R}.$$

Направление изменилось: до размыкания ток заряжал верхнюю (положительную) обкладку, теперь она отдаёт заряд: ток идёт из неё вверх по левой ветке, по верхнему проводу к узлу и вниз через R. Сравните: $I_{C*} = E/(2R)$ до размыкания и $I' = E/(4R)$ после, в противоположную сторону.

Пункт 2. $I' = E/(4R)$.



После размыкания: конденсатор разряжается на R (серым — отключённая ветка с источником). Напряжение $U_* = E/4$ прежнее, ток $I' = U_*/R$ направлен обратно току зарядки.

5. Тепло после размыкания. Теперь в цепи нет источника: энергия конденсатора в момент размыкания $W_* = CU_*^2/2$ целиком превращается в тепло на R (закон сохранения энергии для замкнутого контура

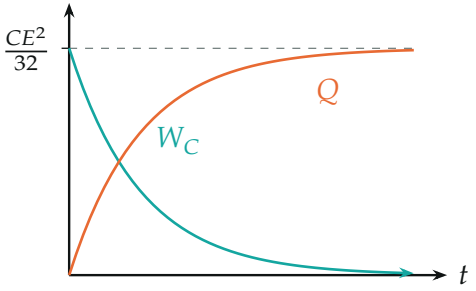
«конденсатор + R»; больше потребителей нет):

$$Q = W_* = \frac{CU_*^2}{2} = \frac{C}{2}\cdot\frac{E^2}{16} = \frac{CE^2}{32}.$$

Второй способ: ток I' затухает по закону $I'(t) = \dfrac{E}{4R}\,e^{-t/RC}$ (контур RC), поэтому

$$Q = \int_0^\infty I'^2 R\,dt = \left(\frac{E}{4R}\right)^2 R\cdot\frac{RC}{2} = \frac{CE^2}{32}.$$

Пункт 3. $Q = CE^2/32$.



После размыкания энергия конденсатора W_C (бирюзовая) убывает, выделившееся тепло Q (морковная) растёт; сумма постоянна и в пределе $Q = CE^2/32$.

Проверка. Размерность: E/R — ток, CE^2 — энергия. Предел: если бы ключ разомкнули при полном заряде, $U = E/2$, было бы $Q = CE^2/8$; здесь напряжение вдвое меньше, энергия в $2^2 = 4$ раза меньше — $CE^2/32$. Численное решение уравнения зарядки (python) дало максимум мощности при $U/E = 0{,}250$, $I_C R/E = 0{,}500$, $t_* = 0{,}693\,\tau$ и $Q/(CE^2) = 0{,}03127 \approx 1/32$. Физический смысл: сначала цепь заряжает конденсатор, пока он «не успел» набрать напряжение; в момент размыкания напряжение равно четверти ЭДС, и накопленная энергия уходит в R.

Ответ. 1) $I_{C0} = \dfrac{E}{R}$; 2) $I' = \dfrac{E}{4R}$ (направлен противоположно току зарядки); 3) $Q = \dfrac{CE^2}{32}$.