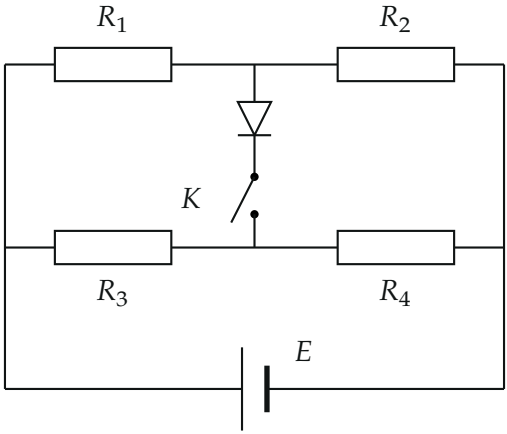
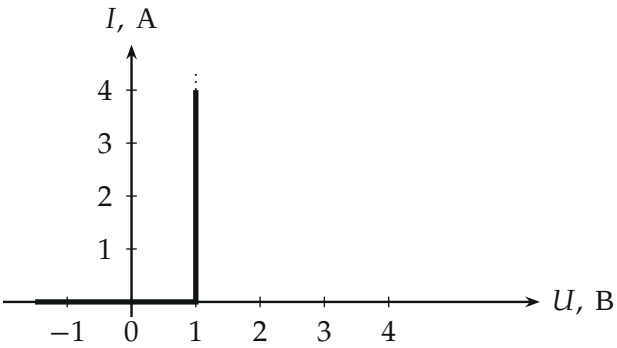
Мостовая схема с диодом

Задача 4. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 4] В цепи используется мостовая схема (см. рис.). ЭДС идеального источника $E = 10$ В, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 2$ Ом. Вольт-амперная характеристика диода показана на рисунке, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В.





1. Найти ток через резистор R_3 при разомкнутом ключе K.
2. При каких значениях R_1 ток потечёт через диод при замкнутом ключе K?
3. При каком значении R_1 мощность тепловых потерь на диоде будет равна $P_D = 1{,}25$ Вт?

▲ **Решение. Что происходит.** Резисторы R_1, R_2 и R_3, R_4 образуют два делителя напряжения, подключённых к источнику; диод с ключом соединяет их средние точки A и B. Диод идеальный, с порогом: пока напряжение на нём в прямом направлении меньше U_0, ток через него не идёт, а когда ток идёт, напряжение на диоде в точности равно U_0 (вертикальный участок вольт-амперной характеристики). Это задача на диод, решаем её перебором состояний: считаем диод закрытым, находим потенциалы A и B и проверяем $\varphi_A - \varphi_B \geq U_0$. Нарушено — диод закрыт, выполнено — диод открыт, и на нём стоит напряжение U_0.

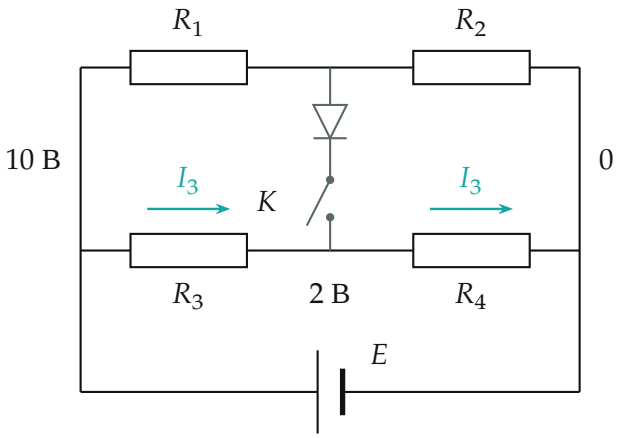
Обозначения. Из рисунка: длинная пластина источника слева, поэтому левый узел — положительный полюс. Потенциал правого узла примем за нуль, тогда потенциал левого равен $E = 10$ В. A — точка между R_1 и R_2, B — между R_3 и R_4; диод пропускает ток от A к B (его треугольник направлен вниз, к B).

1. Ключ разомкнут. Ветвь с диодом отключена, поэтому ток в нижней ветви один и тот же в R_3 и R_4. Запишем закон Ома для всей нижней ветви, подключённой к идеальному источнику (верхняя ветвь R_1–R_2 с источником параллельна, на ток в нижней не влияет):

$$I_3 = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{10}{8 + 2} = 1 \text{ А}.$$

Потенциал точки B при этом $\varphi_B = I_3 R_4 = 2$ В; он понадобится дальше.

Пункт 1. $I_3 = 1$ А.



Ключ разомкнут: диод отключён (серый), ток $I_3 = E/(R_3 + R_4)$ идёт через R_3 и R_4; потенциал B равен $I_3 R_4 = 2$ В.

2. Ключ замкнут, диод закрыт: потенциалы. Пока диод заперт, ветви не связаны: A — середина делителя R_1, R_2, B — середина делителя R_3, R_4. Потенциал точки делится в отношении сопротивлений, и от правого узла (нулевой потенциал) до точки отсчитываем падение на нижнем резисторе:

$$\varphi_B = E\,\frac{R_4}{R_3 + R_4} = 2\text{ В}, \qquad \varphi_A = E\,\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{120}{R_1 + 12}\text{ В}.$$

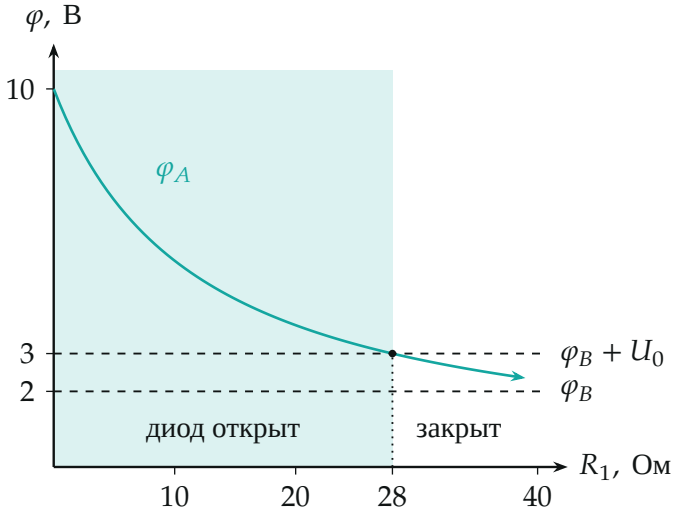
Здесь R_1 в омах.

3. Условие открытия диода. Прямое напряжение на диоде $\varphi_A - \varphi_B$. Ток пойдёт, когда оно достигнет порога U_0:

$$\varphi_A \geq \varphi_B + U_0 = 3\text{ В} \quad\Longrightarrow\quad \frac{120}{R_1 + 12} \geq 3 \quad\Longrightarrow\quad R_1 \leq 28\text{ Ом}.$$

Обратите внимание: чем больше R_1, тем меньше падение на R_2 и тем ниже φ_A, поэтому ток через диод идёт при малых R_1; при $R_1 = 28$ Ом напряжение на диоде как раз равно порогу, а тока ещё нет.

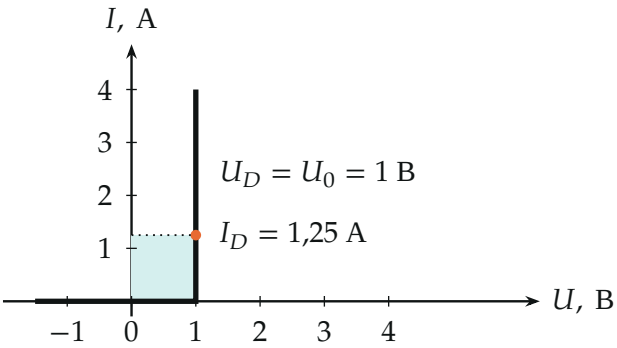
Пункт 2. $R_1 < 28$ Ом.



Потенциал точки A как функция R_1 (бирюзовая линия) и линии $\varphi_B = 2$ В, $\varphi_B + U_0 = 3$ В (штриховые): диод открыт там, где кривая выше верхней штриховой, то есть при $R_1 < 28$ Ом (закрашено).

4. Мощность на диоде и ток через него. Когда ток идёт, на диоде напряжение U_0 (вертикальный участок характеристики), поэтому

$$P_D = U_0 I_D \quad \Rightarrow \quad I_D = \frac{P_D}{U_0} = \frac{1{,}25}{1} = 1{,}25 \text{ А}.$$



Вольт-амперная характеристика диода и рабочая точка: пока диод открыт, $U_D = U_0$, а ток I_D может быть любым. Закрашенный прямоугольник

$U_0 \times I_D$ по площади равен мощности P_D.

5. Потенциалы при открытом диоде. Диод открыт, поэтому $\varphi_A = \varphi_B + U_0$. Запишем закон сохранения заряда (правило узлов) для точки B: в неё втекает ток $(E - \varphi_B)/R_3$ через R_3 и ток I_D через диод, вытекает ток φ_B/R_4 через R_4:

$$I_D + \frac{E - \varphi_B}{R_3} = \frac{\varphi_B}{R_4} \quad \Rightarrow \quad 1{,}25 + \frac{10 - \varphi_B}{8} = \frac{\varphi_B}{2},$$

$$\varphi_B = 4 \text{ В}, \qquad \varphi_A = \varphi_B + U_0 = 5 \text{ В}.$$

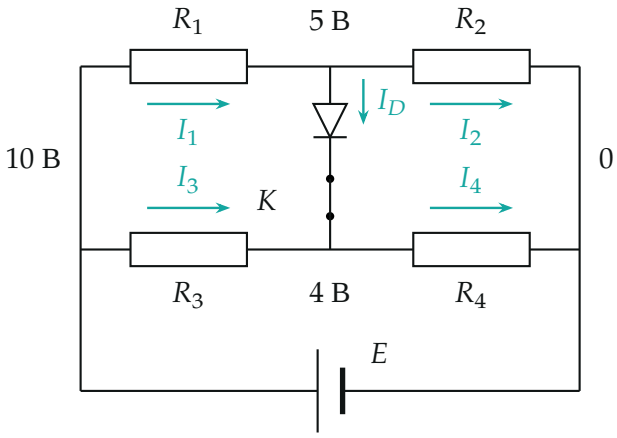
6. Сопротивление R_1. Правило узлов для точки A: через R_1 втекает ток $(E - \varphi_A)/R_1$, вытекает ток I_D через диод и ток φ_A/R_2 через R_2:

$$\frac{E - \varphi_A}{R_1} = I_D + \frac{\varphi_A}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{R_1} = 1{,}25 + \frac{5}{12} = \frac{5}{3},$$

$$R_1 = 3 \text{ Ом}.$$

Условие пункта 2 выполнено ($3 < 28$), диод действительно открыт: $\varphi_A = 5 > \varphi_B$.

Пункт 3. $R_1 = 3$ Ом.

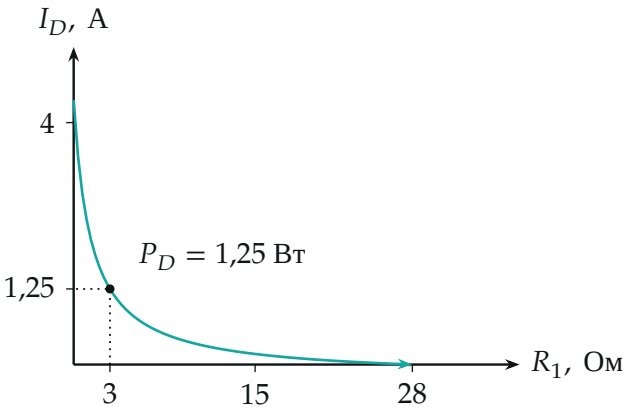


Токи и потенциалы при $R_1 = 3$ Ом: $I_1 = \frac{5}{3}$ А, $I_2 = \frac{5}{12}$ А, $I_D = 1{,}25$ А, $I_3 = 0{,}75$ А, $I_4 = 2$ А. В точке A: $I_1 = I_2 + I_D$, в точке B: $I_D + I_3 = I_4$.

7. Второй способ: ток диода как функция R_1. Те же два уравнения для произвольного $R_1 < 28$ Ом (с $\varphi_A = \varphi_B + U_0$) дают

$$\varphi_B = \frac{216 + 28R_1}{24 + 17R_1}, \qquad I_D = \frac{5\varphi_B - 10}{8} = \frac{15\,(28 - R_1)}{4\,(24 + 17R_1)}\ \text{А}.$$

Условие $U_0 I_D = 1{,}25$ даёт $15(28 - R_1) = 5(24 + 17R_1)$, то есть $420 - 15R_1 = 120 + 85R_1$, $R_1 = 3$ Ом — то же число. При $R_1 \to 28$ Ом ток диода стремится к нулю, как и должно быть на границе пункта 2.



Ток диода при открытом диоде убывает с ростом R_1 и обращается в нуль при $R_1 = 28$ Ом; мощности 1,25 Вт отвечает $R_1 = 3$ Ом.

Проверка. Размерности: ток — ампер, R_1 — ом. Баланс мощностей при $R_1 = 3$ Ом: источник отдаёт $E(I_1 + I_3) = 10\left(\frac{5}{3} + 0{,}75\right) \approx 24{,}17$ Вт; тепло выделяется на R_1 ($\frac{25}{9}\cdot 3 \approx 8{,}33$ Вт), R_2 ($\approx 2{,}08$ Вт), диоде (1,25 Вт), R_3 (4,5 Вт) и R_4 (8 Вт) — сумма тоже $\approx$ 24,17 Вт. Численный расчёт (python) подтвердил $R_1 = 3{,}00$ Ом и границу 28 Ом. Физический смысл: пока R_1 велико, потенциал A слишком низок, и диод заперт; при малых R_1 он открыт, и тем сильнее, чем меньше R_1.

Ответ. 1) $I_3 = 1$ А; 2) $R_1 < 28$ Ом; 3) $R_1 = 3$ Ом.