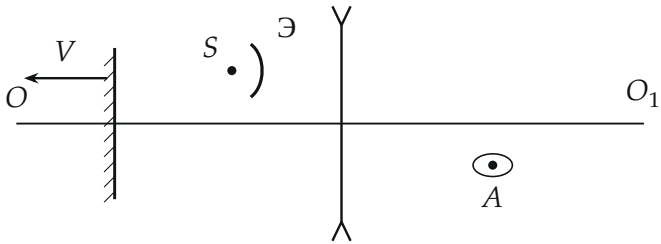
Рассеивающая линза и движущееся зеркало

Задача 5. [Физтех 2019/20, 11 класс, задача 5] Оптическая система состоит из тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $-F$ ($F > 0$), плоского зеркала и небольшого экрана Э, расположенного так, что свет от источника S может попасть на линзу только после отражения от зеркала (см. рис.). Зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси OO_1 линзы. Источник S находится на расстоянии $3F/4$ от оси OO_1 и на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы. Линза и источник неподвижны, а зеркало движется со скоростью V вдоль оси OO_1. В некоторый момент зеркало оказалось на расстоянии F от линзы.

1. На каком расстоянии от плоскости линзы наблюдатель A сможет увидеть в этот момент изображение источника в системе?
2. Под каким углом α к оси OO_1 движется изображение в этот момент? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)
3. Найти скорость изображения в этот момент.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Свет идёт от источника к зеркалу, отражается и попадает на линзу, которая строит окончательное изображение. Задача на последовательное построение изображений в двух оптических элементах: плоское зеркало даёт мнимое изображение S_1, которое для линзы служит предметом, а рассеивающая линза даёт мнимое уменьшенное прямое изображение S_2, лежащее между линзой и S_1 с той же стороны от линзы. Положение S_2 найдём по формуле тонкой линзы с отрицательным фокусным расстоянием. Скорость изображения — производная по времени: зеркало сдвигает S_1 вдвое быстрее, чем движется

само, а линза превращает это смещение в смещение S_2 с известными коэффициентами, продольным и поперечным.

Обозначения. Ось x направим вдоль OO_1 от линзы к зеркалу (на рисунках — влево), начало — в плоскости линзы. $x_з$ — расстояние от линзы до зеркала (в момент опроса $x_з = F$), $h = 3F/4$ — высота источника над осью, S_1 — изображение S в зеркале на расстоянии d от линзы, S_2 — изображение S_1 в линзе на расстоянии q от линзы (с той же стороны, что и S_1), y — его высота над осью. Фокусное расстояние линзы $-F$: у собирающей линзы оно положительно, у рассеивающей — отрицательно.

Пункт 1.

1. Изображение в зеркале. Плоское зеркало даёт мнимое изображение, симметричное источнику относительно плоскости зеркала. Источник стоит на расстоянии $x_з - F/2 = F/2$ от зеркала, значит, S_1 — за зеркалом на том же расстоянии $F/2$. Расстояние от линзы до S_1 и его высота над осью:

$$d = x_з + \frac{F}{2} = \frac{3F}{2}, \qquad h = \frac{3F}{4}.$$

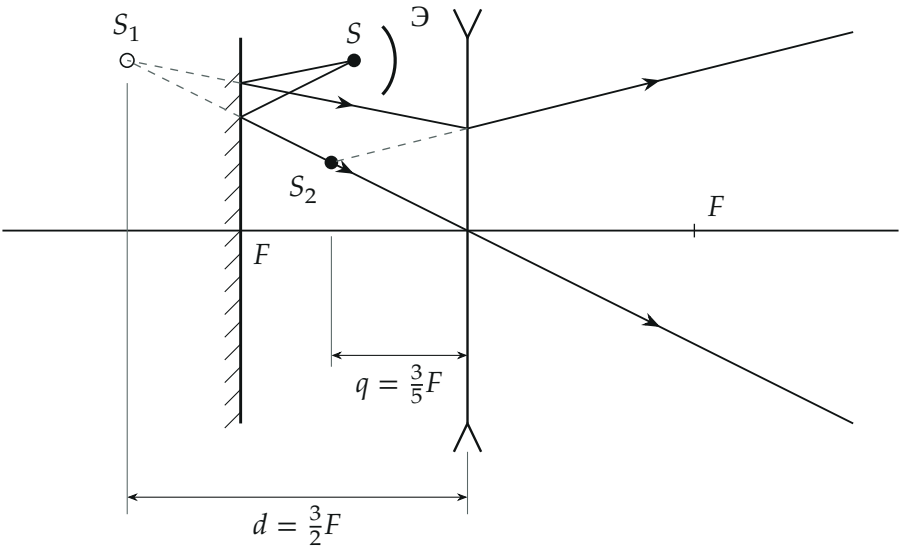
Отражённые лучи идут так, как если бы выходили из S_1: на линзу падает расходящийся пучок, и предмет для линзы — именно S_1.

2. Формула тонкой линзы. Для линзы с фокусным расстоянием $-F$ формула имеет вид $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$, где $f < 0$ означает мнимое изображение. Положим $q = -f$ — расстояние до мнимого изображения. Тогда

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{F}, \qquad q = \frac{dF}{d+F} = \frac{\frac{3}{2}F \cdot F}{\frac{5}{2}F} = \frac{3F}{5}.$$

Знаменатель $d + F$ положителен при любом d: рассеивающая линза всегда даёт мнимое изображение, и оно лежит ближе фокуса ($q < F$). Лучи после линзы идут расходящимся пучком, и наблюдатель A, смотрящий сквозь линзу, видит изображение там, откуда лучи, продолженные назад, пересекаются: на расстоянии $\frac{3F}{5}$ от плоскости линзы, на стороне

зеркала (между линзой и зеркалом). Увеличение $\Gamma = q/d = \frac{2}{5}$, высота изображения $\Gamma h = \frac{3F}{10}$ над осью — с той же стороны оси, что и источник: изображение прямое и уменьшенное.



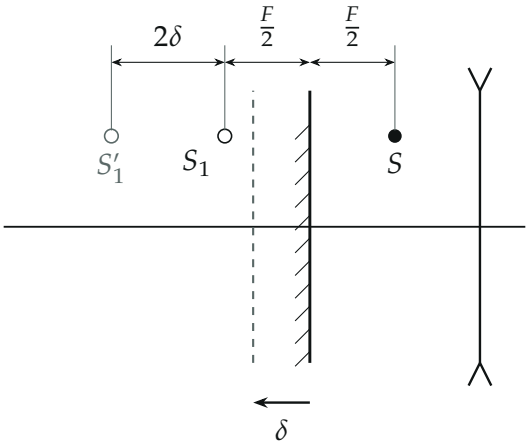
Построение: лучи от S отражаются от зеркала (продолжения за зеркалом, пунктир, сходятся в S_1), затем рассеиваются линзой так, что продолжения лучей назад пересекаются в S_2. Луч через центр линзы не преломляется; второй луч проходит под экраном и после линзы отклоняется от оси. Наблюдатель А справа от линзы видит расходящийся пучок и «видит» S_2 там, где сходятся пунктиры.

Пункт 2.

3. Как движется S_1. Зеркало отодвинулось на δ — расстояние от источника до зеркала выросло на δ, а изображение S_1 стоит за зеркалом на таком же расстоянии, поэтому оно удалилось от источника на 2δ и от линзы тоже:

$$d = x_з + (x_з - \tfrac{F}{2}) = 2x_з - \frac{F}{2}, \qquad \dot{d} = 2V.$$

Высота S_1 над осью не меняется: $h = 3F/4$.



Сдвиг зеркала на δ (сплошная линия → пунктир) сдвигает S_1 на 2δ ($S_1 \to S_1'$). Скорость S_1 равна $2V$.

4. Продольная скорость изображения. Подставим $q = dF/(d+F)$ и продифференцируем по времени:

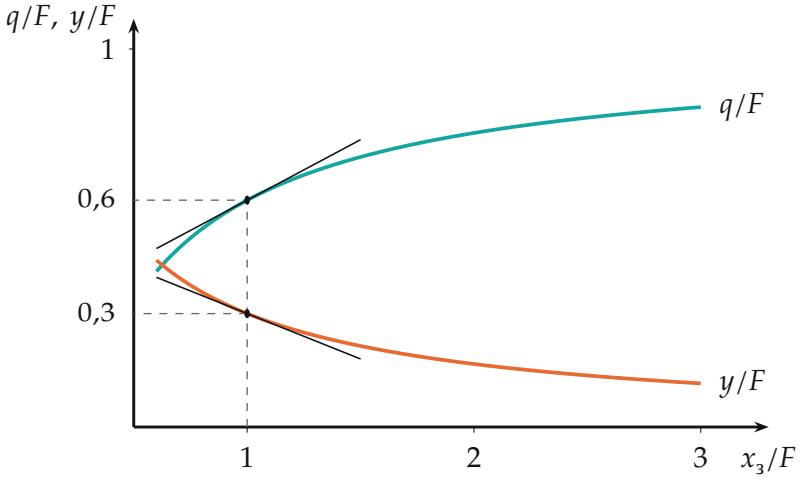
$$\dot{q} = \frac{F^2}{(d+F)^2}\,\dot{d} = \frac{F^2}{(5F/2)^2}\cdot 2V = \frac{4}{25}\cdot 2V = \frac{8}{25}\,V.$$

Знак «плюс»: расстояние q растёт, изображение S_2 удаляется от линзы вдоль оси, в ту же сторону, куда уходит зеркало, со скоростью $v_x = \dfrac{8}{25}V$. Тот же результат даёт квадрат увеличения: $\Gamma^2\dot{d} = \dfrac{4}{25}\cdot 2V$.

5. Поперечная скорость изображения. Высота изображения над осью $y = h\,q/d = \dfrac{hF}{d+F}$ при постоянной h:

$$\dot{y} = -\frac{hF}{(d+F)^2}\,\dot{d} = -\frac{\frac{3}{4}F\cdot F}{(5F/2)^2}\cdot 2V = -\frac{3}{25}\cdot 2V = -\frac{6}{25}\,V.$$

Высота уменьшается: изображение приближается к оси со скоростью $v_y = \dfrac{6}{25}V$.



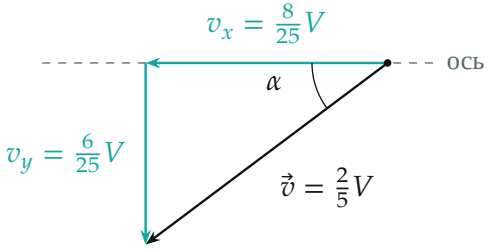
Положение изображения (расстояние до линзы q и высота y в единицах F) в зависимости от положения зеркала. В точке $x_з = F$ касательные имеют наклоны $+\frac{8}{25}$ и $-\frac{6}{25}$: при скорости зеркала V они дают v_x и v_y.

Пункт 3.

6. Направление и скорость. Скорость изображения составлена из двух перпендикулярных составляющих: вдоль оси ($\frac{8}{25}V$, от линзы) и к оси ($\frac{6}{25}V$):

$$\tan\alpha = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{64+36}}{25}\,V = \frac{10}{25}\,V = \frac{2}{5}\,V.$$

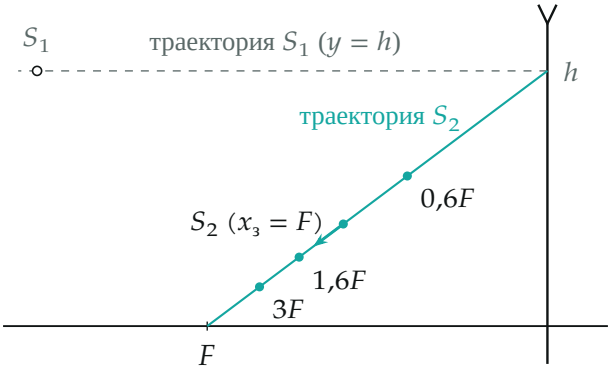


Скорость изображения: $v_x = \frac{8}{25}V$ *вдоль оси (от линзы, к зеркалу) и* $v_y = \frac{6}{25}V$ *(к оси).*

7. Второй способ для направления. Изображение точки, которая движется параллельно оси на высоте h над ней, лежит на продолжении луча, который шёл параллельно оси. После рассеивающей линзы такой луч идёт так, будто выходит из переднего фокуса, лежащего с той же стороны, что и предмет. Для S_1, движущегося вдоль прямой $y = h$, изображение лежит на прямой, проходящей через передний фокус (точку на расстоянии F от линзы) и точку на линзе на высоте h; её наклон к оси

$$\tan\alpha = \frac{h}{F} = \frac{3F/4}{F} = \frac{3}{4}.$$

Совпало с пунктом 6.



Положения изображения S_2 *(бирюзовые точки) при разных положениях зеркала лежат на одной прямой: она проходит через передний фокус и точку линзы на высоте* h*. Изображение движется по ней от линзы к фокусу (стрелка), оно всё время остаётся ближе фокуса. Подписи у точек — положение зеркала* $x_з$*.*

Обратите внимание. 1) Скорость изображения в зеркале равна $2V$, а не V: смещение источника относительно зеркала удваивается. 2) Рассеивающая линза даёт мнимое изображение, и формула $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ с положительным F здесь неверна: фокусное расстояние берётся со знаком

минус, и тогда $f < 0$ — мнимое изображение. 3) Скорость изображения в линзе мала: продольная — в $\Gamma^2 = \dfrac{4}{25}$ раза от скорости предмета ($\dfrac{8}{25}V = \dfrac{4}{25}\cdot 2V$), а не $2V$; поэтому и итог — всего $\dfrac{2}{5}V$.

Проверка. Размерность: q и F — длины; $\dot{q}, \dot{y}$ — скорости. Численное дифференцирование на python (смещение зеркала на малый шаг, пересчёт d, q, y) даёт $0{,}3200\,V$ и $-0{,}2400\,V$ на единицу скорости зеркала, то есть $\frac{8}{25}V$ и $-\frac{6}{25}V$, модуль $0{,}4000\,V$. Предел: при $x_з \to \infty$ имеем $d \to \infty$, изображение стремится к переднему фокусу, и $\dot{q} \approx 2V(F/d)^2 \to 0$ — как и должно быть. Смысл: зеркало равномерно двигает S_1, а изображение в рассеивающей линзе прижато к фокальной плоскости, поэтому его скорость в 2,5 раза меньше скорости зеркала.

Ответ. 1) на расстоянии $\dfrac{3F}{5}$ от плоскости линзы, на стороне зеркала (мнимое прямое изображение); 2) $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ ($\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$), изображение движется от линзы и к оси; 3) $v = \dfrac{2}{5}V$.