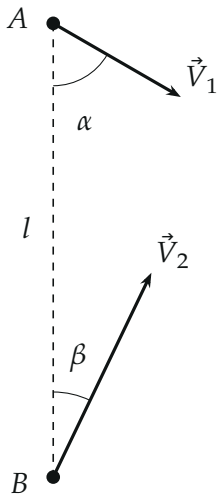
Корабль и торпеда

Задача 1. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 1] Корабль A и торпеда B в некоторый момент времени находятся на расстоянии $l = 1$ км друг от друга (см. рис.). Скорость корабля $V_1 = 10$ м/с, угол $\alpha = 60°$. Скорость торпеды $V_2 = 20$ м/с. Угол β таков, что торпеда попадёт в цель.



1. Найдите $\sin\beta$.
2. Через какое время T расстояние между кораблём и торпедой составит $S = 770$ м?

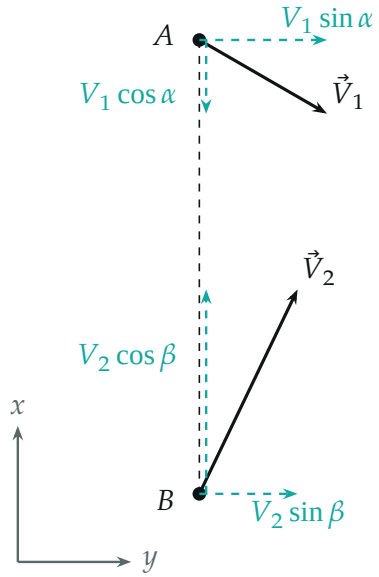
▲ **Решение. Что происходит.** Корабль и торпеда движутся равномерно и прямолинейно. Удобнее всего смотреть на движение торпеды из системы отсчёта корабля: там корабль стоит, и торпеда попадёт в него, только если её относительная скорость направлена точно на корабль, вдоль прямой BA. Класс задачи: относительное движение, закон сложения скоростей.

Обозначения. Ось x направим вдоль BA (от торпеды к кораблю), ось y — перпендикулярно ей, вправо, в ту сторону, куда отклонены обе скорости. $\vec{u} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ — скорость торпеды относительно корабля.

1. Проекции скоростей на оси. Скорость корабля составляет угол α с направлением AB, то есть с отрицательным направлением оси x; скорость торпеды — угол β с направлением BA, то есть с осью x:

$$V_{1x} = -V_1 \cos\alpha, \quad V_{1y} = V_1 \sin\alpha;$$

$$V_{2x} = V_2 \cos\beta, \quad V_{2y} = V_2 \sin\beta.$$



Разложение скоростей вдоль прямой BA и перпендикулярно ей.

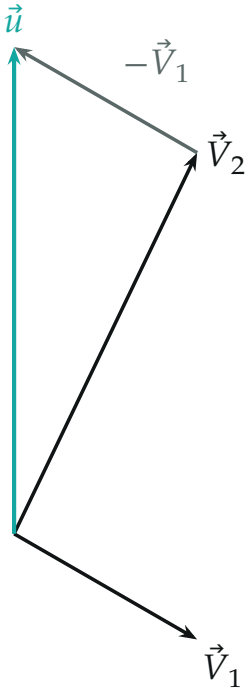
2. Условие попадания. По закону сложения скоростей $\vec{u} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Корабль в своей системе отсчёта неподвижен, торпеда начинает на оси x под ним; попадёт она, только если всё время остаётся на этой оси, то есть $u_y = 0$:

$$u_y = V_2 \sin\beta - V_1 \sin\alpha = 0,$$

$$\sin\beta = \frac{V_1 \sin\alpha}{V_2} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}/2}{20} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43.$$

Смысл: поперёк линии AB торпеда должна смещаться так же быстро, как корабль, — тогда линия AB переносится параллельно самой себе и

только укорачивается.



Векторы в одном масштабе: $\vec{u} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$ направлен вдоль оси x — на корабль (длины V_1 и V_2 в отношении $1:2$; $-\vec{V}_1$ приложен к концу $\vec{V}_2$).

3. Скорость сближения. Относительная скорость направлена на корабль, её модуль

$$u = u_x = V_2\cos\beta - V_{1x} = V_2\cos\beta + V_1\cos\alpha.$$

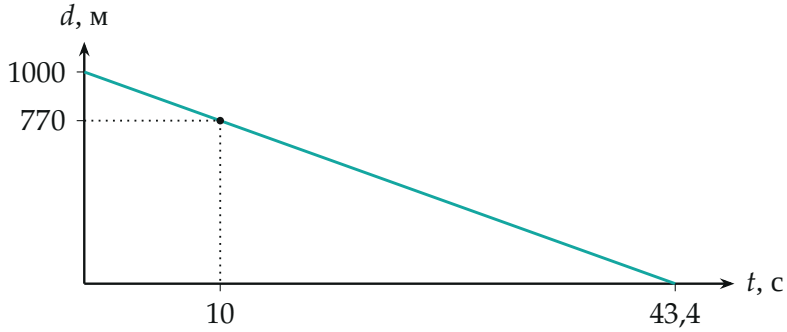
Здесь $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-3/16} = \sqrt{13}/4$:

$$u = 20\cdot\frac{\sqrt{13}}{4} + 10\cdot\frac{1}{2} = 5(\sqrt{13}+1) \approx 23{,}0 \text{ м/с}.$$

Знак плюс: корабль идёт навстречу торпеде (проекция $V_{1x} < 0$), поэтому сближение быстрее, чем у одной торпеды.

4. Время. В системе корабля торпеда равномерно идёт по прямой BA, расстояние убывает линейно: $d(t) = l - ut$. Условие $d(T) = S$:

$$T = \frac{l-S}{u} = \frac{l-S}{V_2\cos\beta + V_1\cos\alpha} = \frac{1000-770}{23{,}03} \approx 10 \text{ с}.$$



Расстояние между торпедой и кораблём убывает линейно со скоростью $u \approx 23$ м/с; до попадания $l/u \approx 43$ с.

Обратите внимание: в систему отсчёта корабля переходить удобно именно потому, что там цель неподвижна и «попадёт» превращается в простое геометрическое условие — относительная скорость направлена на цель.

Проверка. Размерность: $[\sin\beta] = \frac{\text{м/с}}{\text{м/с}}$ — безразмерен, $[T] = \frac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}$. Предел: при $V_1 \to 0$ получаем $\sin\beta = 0$ — в неподвижную цель стреляют прямо, и $T = (l-S)/V_2$, как и должно быть. Второй способ для п. 2: в лабораторной системе торпеда за T сместилась поперёк AB на $V_2\sin\beta\cdot T = 86{,}5$ м, корабль — на $V_1\sin\alpha\cdot T = 86{,}5$ м, вдоль AB сумма путей $(V_2\cos\beta + V_1\cos\alpha)T = 230$ м $= l - S$.

Ответ. 1) $\sin\beta = \dfrac{V_1\sin\alpha}{V_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43$; 2) $T = \dfrac{l-S}{V_2\cos\beta + V_1\cos\alpha} \approx 10$ с.