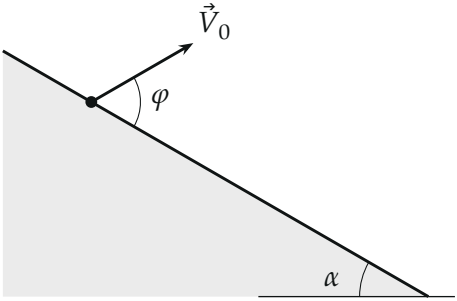
Мина на склоне

Задача 2. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 2] Плоский склон горы образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Из миномёта, расположенного на склоне, производят выстрел под таким углом φ к поверхности склона, что продолжительность (по времени) полёта мины наибольшая. Мина падает на склон на расстоянии $S = 0{,}8$ км от точки старта.

1. Под каким углом φ к поверхности склона произведён выстрел?
2. Найдите величину V_0 начальной скорости мины.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.



Поясняющий рисунок: миномёт на склоне, φ — угол между скоростью вылета и поверхностью склона.

▲ **Решение. Что происходит.** После выстрела на мину действует только сила тяжести, она летит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Полёт кончается, когда мина возвращается на склон, поэтому время полёта определяется движением *поперёк* склона: удобно взять оси вдоль склона и перпендикулярно ему — тогда «упала на склон» означает просто «координата y снова равна нулю». Класс задачи: бросок под углом к наклонной плоскости, поиск максимума.

Обозначения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону вверх; начало — точка выстрела. τ — время полёта.

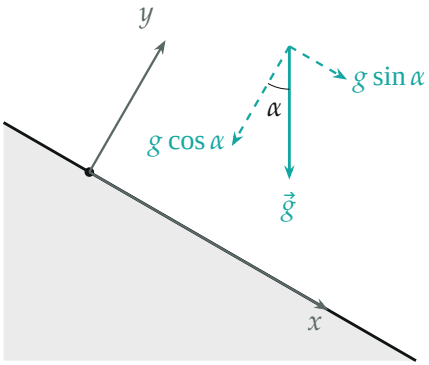
1. Проекции ускорения и начальной скорости. Угол между $\vec{g}$ и нормалью к склону равен углу наклона склона α (стороны углов взаимно

перпендикулярны), поэтому

$$g_x = g\sin\alpha, \qquad g_y = -g\cos\alpha.$$

Скорость вылета направлена под углом φ к склону; угол отсчитываем от направления «вниз по склону» (оси x):

$$V_{0x} = V_0\cos\varphi, \qquad V_{0y} = V_0\sin\varphi.$$



Оси вдоль и поперёк склона и разложение ускорения $\vec{g}$ по ним.

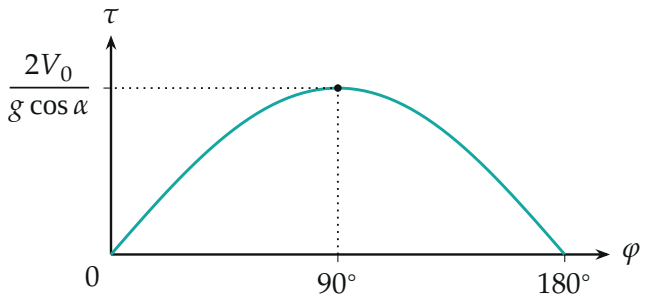
2. Время полёта. Закон равноускоренного движения в проекции на ось y: $y(t) = V_0\sin\varphi\, t - \dfrac{g\cos\alpha\, t^2}{2}$. Мина снова на склоне при $y(\tau) = 0$, $\tau \neq 0$:

$$\tau = \frac{2V_0\sin\varphi}{g\cos\alpha}.$$

При заданной скорости V_0 время зависит от угла только через $\sin\varphi$ и наибольшее при $\sin\varphi = 1$:

$$\varphi = 90^\circ.$$

Выстрел — перпендикулярно склону. Время полёта от угла наклона склона здесь не «мешает»: $\cos\alpha$ стоит множителем и на выбор φ не влияет.



Время полёта при фиксированной V_0 в зависимости от угла выстрела к склону: $\tau \propto \sin\varphi$, максимум при $\varphi = 90°$.

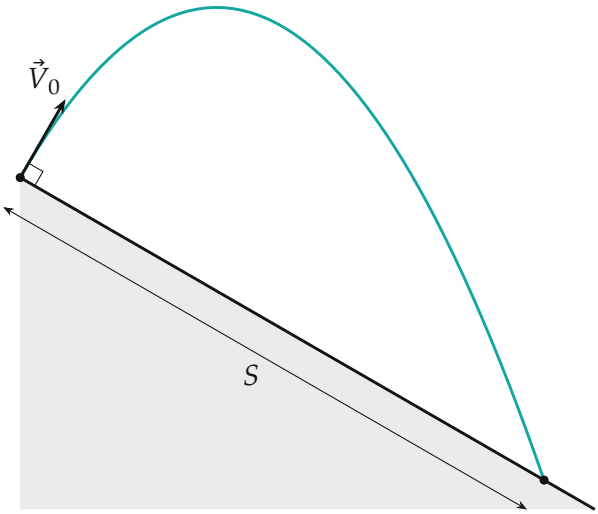
3. Дальность по склону. Закон движения в проекции на ось x при $\varphi = 90°$: $V_{0x} = 0$, ускорение $g\sin\alpha$ — мина разгоняется вниз по склону из покоя (вдоль склона):

$$S = \frac{g\sin\alpha\,\tau^2}{2} = \frac{g\sin\alpha}{2}\cdot\frac{4V_0^2}{g^2\cos^2\alpha} = \frac{2V_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Знак: $S > 0$ — мина падает ниже по склону, чем стоит миномёт.

4. Начальная скорость. Выразим V_0:

$$V_0 = \cos\alpha\sqrt{\frac{gS}{2\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{10\cdot 800}{2\cdot 0{,}5}} = \sqrt{6000} \approx 77 \text{ м/с}.$$



Траектория мины по вычисленным точкам: выстрел перпендикулярно склону со скоростью 77 м/с, время полёта $\tau \approx 17{,}9$ с, падение в 800 м ниже по склону.

Обратите внимание: «наибольшее время полёта» и «наибольшая дальность» — разные условия. Дальность по склону максимальна при другом угле, а время — ровно при выстреле перпендикулярно склону, потому что время определяется только поперечной составляющей скорости.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$. Предел: при $\alpha \to 0$ (горизонталь) выстрел вертикальный и мина падает обратно в точку старта, $S \to 0$ — формула для S это даёт. Второй способ в лабораторных осях: скорость V_0 под углом 60° к горизонту, $\tau = 17{,}89$ с; горизонтальное смещение $V_0 \cos 60° \cdot \tau = 692{,}8$ м, вертикальное $V_0 \sin 60° \tau - g\tau^2/2 = -400$ м, расстояние $\sqrt{692{,}8^2 + 400^2} = 800$ м, наклон $400/692{,}8 = \operatorname{tg} 30°$ — точка на склоне.

Ответ. 1) $\varphi = 90°$ (перпендикулярно склону); 2) $V_0 = \cos\alpha \sqrt{\dfrac{gS}{2\sin\alpha}} = \sqrt{6000} \approx 77$ м/с.