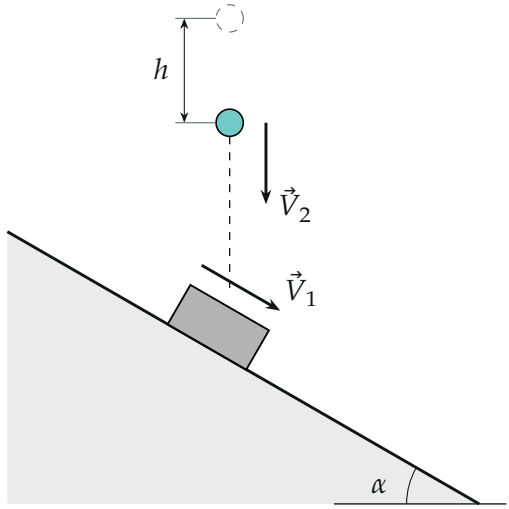
Пластилиновый шарик падает на брусок

Задача 3. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 3] Вниз по шероховатой наклонной плоскости равнозамедленно движется брусок. В тот момент, когда скорость бруска равна $V_1 = 1$ м/с, на брусок падает пластилиновый шарик и прилипает к нему, а брусок останавливается. Движение шарика до соударения — свободное падение с высоты $h = 0{,}8$ м с нулевой начальной скоростью.

1. Найдите скорость V_2 шарика перед соударением.
2. Найдите величину a ускорения бруска перед соударением.

Массы бруска и шарика одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Быстрые процессы торможения бруска и деформации пластилина заканчиваются одновременно. В этих процессах действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.



Поясняющий рисунок: брусок скользит вниз по склону, шарик падает с высоты h (угол α в условии не задан).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача из двух этапов. До удара брусок тормозит на склоне: трение больше скатывающей силы. Удар очень короткий: за это время силы тяжести не успевают изменить импульс, а вот

сила реакции склона и сила трения скольжения во время удара огромны — они и гасят импульс шарика и бруска. Ключ к задаче: импульс трения связан с импульсом нормальной реакции тем же коэффициентом μ, что и сами силы, и тот же μ определяет ускорение бруска до удара. Класс задачи: неупругий удар о шероховатую поверхность + динамика на наклонной плоскости.

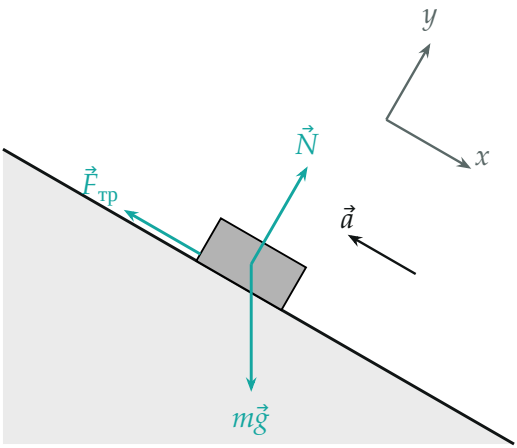
Обозначения. m — масса бруска и шарика, α — угол наклона (не задан), μ — коэффициент трения скольжения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону вверх.

Пункт 1. Закон сохранения механической энергии для шарика при свободном падении с высоты h из покоя:

$$\frac{mV_2^2}{2} = mgh \quad \Longrightarrow \quad V_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8} = 4 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

1. Ускорение до удара. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная вверх по склону (брусок скользит вниз), $F_{\text{тр}} = \mu N$.



Силы, действующие на брусок до удара. Брусок скользит вниз, а ускорение $\vec{a}$ направлено вверх по склону — брусок тормозит.

Второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси (тормозит — значит, ускорение направлено против оси x, по модулю a):

$$y:\ N - mg\cos\alpha = 0; \qquad x:\ -ma = mg\sin\alpha - \mu N.$$

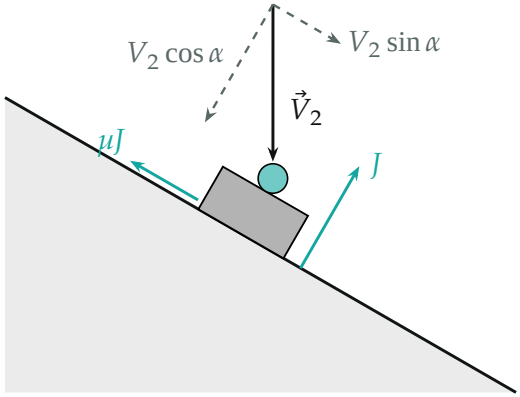
Отсюда

$$a = g\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Ни μ, ни α не даны — нужна комбинация $\mu\cos\alpha - \sin\alpha$. Её даст удар.

2. Удар. Систему «брусок + шарик» за время удара Δt рассмотрим целиком: внутренние силы (пластилин) импульс системы не меняют. Внешние силы — сила тяжести (по условию пренебрежимо мала), реакция склона N' и трение скольжения $\mu N'$, направленное вверх по склону (брусок всё время удара скользит вниз и останавливается в самом конце). Обозначим импульс силы реакции за удар $J = \int N'\,dt$; тогда импульс трения $\int \mu N'\,dt = \mu J$ — коэффициент выносится, потому что он постоянен.

Скорость шарика перед ударом вертикальна; её проекции: $V_{2x} = V_2\sin\alpha$ (вниз по склону), $V_{2y} = -V_2\cos\alpha$ (в склон). После удара оба тела покоятся.



Удар: скорость шарика раскладывается на составляющие вдоль склона и в склон; импульс реакции J гасит составляющую в склон, импульс трения μJ — движение вдоль склона.

Изменение импульса системы равно импульсу внешних сил (второй закон Ньютона в импульсной форме), в проекциях:

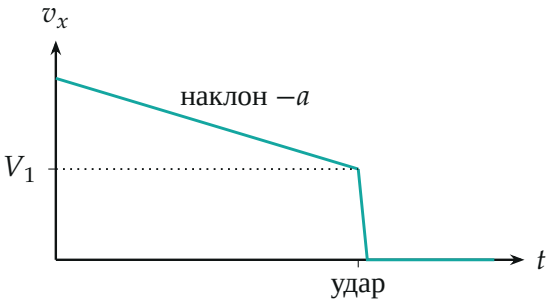
$$y:\ 0-(-mV_2\cos\alpha)=J; \qquad x:\ 0-(mV_1+mV_2\sin\alpha)=-\mu J.$$

Подставим J из первого во второе и сократим m:

$$V_1+V_2\sin\alpha=\mu V_2\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad \mu\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{V_1}{V_2}.$$

3. Ответ на пункт 2. Это ровно та комбинация, что стоит в ускорении:

$$a=g\,(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)=g\,\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{\sqrt{2h/g}}=10\cdot\frac{1}{4}=2{,}5\ \text{м/с}^2.$$



Скорость бруска вдоль склона: равномерное торможение с ускорением a, затем почти мгновенная остановка при ударе.

Обратите внимание: угол склона и коэффициент трения по отдельности найти нельзя, и не нужно: и торможение до удара, и торможение при ударе определяет одна и та же комбинация $\mu\cos\alpha-\sin\alpha$.

Проверка. Размерность: $g\cdot\frac{\text{м/с}}{\text{м/с}}=\text{м/с}^2$. Предел: при $V_1\to 0$ получаем $a\to 0$ — брусок, который и так стоит, шарик «прибивает» к месту без торможения; чем быстрее брусок ехал, тем больше нужно трение, чтобы удар его остановил, и тем сильнее он тормозил до удара. Пример: при $\alpha=30^\circ$ получаем $\mu=(V_1/V_2+\sin\alpha)/\cos\alpha=0{,}87$, и $g(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)=2{,}5\ \text{м/с}^2$.

Ответ. 1) $V_2 = \sqrt{2gh} = 4$ м/с; 2) $a = g\dfrac{V_1}{V_2} = 2{,}5$ м/с^2.