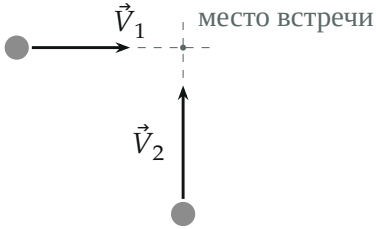
Слипание свинцовых шариков

Задача 4. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 4] Два свинцовых шарика одинаковой массы, летящие со скоростями $V_1 = 60$ м/с и $V_2 = 80$ м/с, слипаются в результате абсолютно неупругого удара. Скорости шариков перед слипанием взаимно перпендикулярны.

1. С какой по величине скоростью V движутся слипшиеся шарики?
2. На сколько Δt (°C) повысится температура шариков?

Удельная теплоёмкость свинца $c = 130$ Дж/(кг·°C). Температуры шариков перед слипанием одинаковы.



Поясняющий рисунок: шарики летят по взаимно перпендикулярным прямым и встречаются.

▲ **Решение. Что происходит.** Удар абсолютно неупругий: шарики слипаются и дальше летят одним телом. За короткое время удара внешние силы импульс системы не меняют, поэтому сохраняется *векторный* импульс. Механическая энергия не сохраняется: её убыль переходит во внутреннюю энергию свинца — шарики нагреваются. Класс задачи: неупругий удар + тепловой баланс.

Обозначения. m — масса каждого шарика, $\vec{V}$ — скорость слипшихся шариков, Q — выделившаяся теплота. Ось x — вдоль $\vec{V}_1$, ось y — вдоль $\vec{V}_2$.

Пункт 1. Закон сохранения импульса системы двух шариков за время удара:

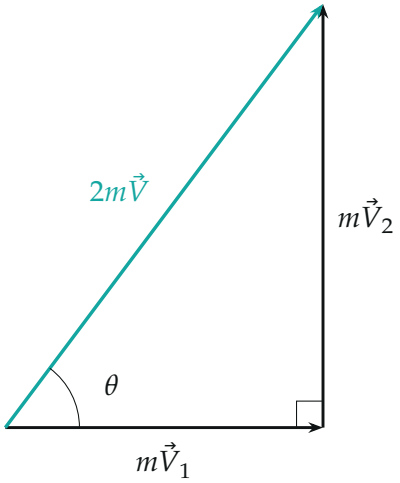
$$m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = 2m\vec{V}.$$

В проекциях на оси:

$$x:\ mV_1 = 2mV_x, \qquad y:\ mV_2 = 2mV_y \quad \Longrightarrow \quad V_x = \frac{V_1}{2}, \quad V_y = \frac{V_2}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{2} = \frac{\sqrt{60^2 + 80^2}}{2} = 50 \text{ м/с}.$$



Треугольник импульсов в масштабе: катеты mV_1 и mV_2, гипотенуза — импульс слипшихся шариков $2mV = m \cdot 100$ м/с.

Направление: $\operatorname{tg}\theta = V_2/V_1 = 4/3$, $\theta \approx 53°$ к направлению $\vec{V}_1$.

Пункт 2.

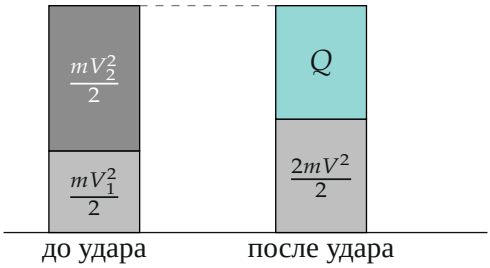
1. Теплота удара. Закон сохранения энергии: убыль кинетической энергии системы равна теплоте

$$Q = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} - \frac{2mV^2}{2}.$$

Подставим $V^2 = (V_1^2 + V_2^2)/4$:

$$Q = \frac{m\,(V_1^2 + V_2^2)}{2} - \frac{m\,(V_1^2 + V_2^2)}{4} = \frac{m\,(V_1^2 + V_2^2)}{4}.$$

Ровно половина начальной кинетической энергии уходит в тепло.



Энергия до и после удара в масштабе: кинетическая энергия слипшихся шариков — половина начальной, вторая половина — теплота Q.

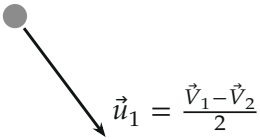
2. Нагрев. Теплота идёт на нагревание обоих шариков, масса $2m$ (температуры одинаковы, так что внутри пары теплообмен не нужен):

$$Q = c \cdot 2m\,\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{V_1^2 + V_2^2}{8c} = \frac{3600 + 6400}{8 \cdot 130} \approx 9{,}6\ ^\circ\text{C}.$$

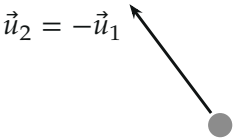
Масса шариков не нужна: и теплота, и теплоёмкость ей пропорциональны.

Обратите внимание: импульсы складываются как векторы, а не как числа: $V \neq (V_1 + V_2)/2 = 70$ м/с. Энергия же — скаляр, её складывают как числа.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{Дж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})} = \frac{\text{Дж/кг}}{\text{Дж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})} = {}^\circ\text{C}$. Второй способ: в системе центра масс (скорость $\vec{V}$) шарики летят навстречу друг другу со скоростями $\pm\frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_2}{2}$, модуль $\frac{100}{2} = 50$ м/с, и вся их кинетическая энергия $2 \cdot \frac{m \cdot 50^2}{2} = m \cdot 2500$ Дж/кг переходит в тепло — то же, что $\frac{m(V_1^2+V_2^2)}{4}$.



- центр масс



В системе центра масс шарики летят навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями и $= \frac{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|}{2} = 50$ *м/с и после удара останавливаются.*

Ответ. 1) $V = \dfrac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{2} = 50$ м/с; 2) $\Delta t = \dfrac{V_1^2 + V_2^2}{8c} \approx 9{,}6\ ^\circ\text{C}$.