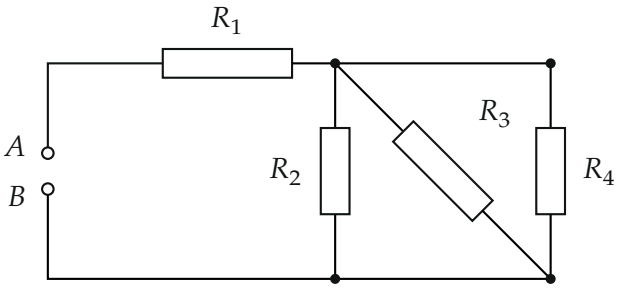
Смешанное соединение четырёх резисторов

Задача 5. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 5] Четыре резистора соединены, как показано на рисунке. Сопротивления резисторов $R_1 = 3r$, $R_2 = R_3 = 2r$, $R_4 = 4r$. На вход AB схемы подают напряжение $U = 38$ В, $r = 10$ Ом.

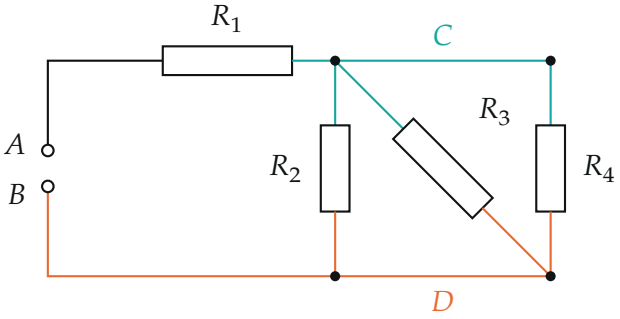


1. Найдите эквивалентное сопротивление R_{AB} цепи.
2. Какой силы I ток будет течь через резистор R_4?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Схема выглядит запутанно из-за диагонального резистора R_3, но провода без сопротивления — это эквипотенциальные куски цепи. Если отметить, какие концы резисторов сидят на одном проводе, окажется, что у резисторов R_2, R_3, R_4 общий верхний узел и общий нижний: все трое включены параллельно, а R_1 — последовательно с ними. Класс задачи: расчёт смешанного соединения через эквипотенциальные узлы.

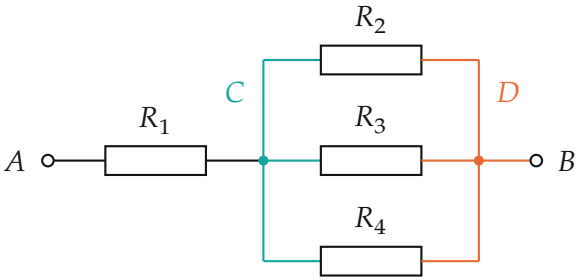
Обозначения. C — верхний узел (провод справа от R_1), D — нижний провод, соединённый с клеммой B; I_0 — полный ток от A к B; $R_{\text{п}}$ — сопротивление параллельного блока; U_{CD} — напряжение на нём.

1. Узлы схемы. Верхний провод справа от R_1 соединяет верх R_2, верхний конец R_3 и верх R_4 — это один узел C. Нижний провод соединяет клемму B, низ R_2, нижний конец R_3 (он пришит к правому нижнему углу) и низ R_4 — узел D.



Провода одного узла выделены одним цветом: всё бирюзовое — узел C, всё морковное — узел D. Каждый из R_2, R_3, R_4 одним концом на C, другим на D.

2. Эквивалентная схема. Резисторы R_2, R_3, R_4 подключены к одной паре узлов C и D — соединение параллельное, напряжение на всех трёх одно и то же U_{CD}. Резистор R_1 стоит между A и C — последовательно с блоком.



Эквивалентная схема: R_1 последовательно с параллельным блоком $R_2 \parallel R_3 \parallel R_4$.

Пункт 1. Сопротивление параллельного блока — проводимости складываются:

$$\frac{1}{R_\text{п}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{4r} = \frac{5}{4r}, \qquad R_\text{п} = \frac{4}{5}r = 0{,}8r.$$

Последовательно с R_1 сопротивления складываются:

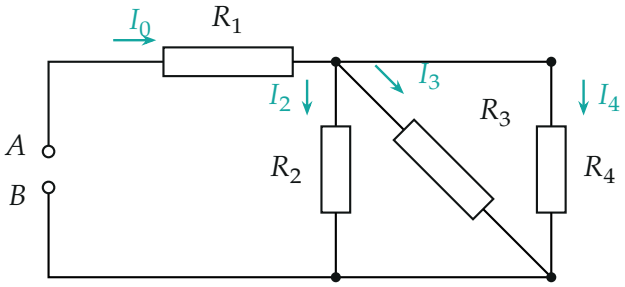
$$R_{AB} = R_1 + R_\text{п} = 3r + 0{,}8r = 3{,}8r = 38\ \text{Ом}.$$

Пункт 2. Закон Ома для всей цепи: $I_0 = \dfrac{U}{R_{AB}} = \dfrac{38}{38} = 1$ А. Этот ток проходит через R_1 и делится между R_2, R_3, R_4. Закон Ома для параллельного блока:

$$U_{CD} = I_0 R_{\text{п}} = 1 \cdot 8 = 8 \text{ В}.$$

Ток через R_4 — закон Ома для этого резистора:

$$I = \frac{U_{CD}}{R_4} = \frac{U}{R_4} \cdot \frac{R_{\text{п}}}{R_{AB}} = \frac{8}{40} = 0{,}2 \text{ А}.$$



Токи в исходной схеме: $I_0 = 1$ А через R_1, в блоке $I_2 = I_3 = U_{CD}/(2r) = 0{,}4$ А, $I_4 = 0{,}2$ А.

Обратите внимание: диагональный R_3 не «перемычка» и не мост: оба его конца лежат на тех же проводах, что и концы R_2 и R_4. Резистор, нарисованный наискось, соединён так же, как нарисованный вертикально.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А}$. Правило узла для C: $I_2 + I_3 + I_4 = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1 \text{ А} = I_0$. Баланс напряжений: $I_0 R_1 + U_{CD} = 30 + 8 = 38 \text{ В} = U$. Ток через R_4 вдвое меньше, чем через R_2 или R_3: сопротивление вдвое больше, а напряжение то же.

Ответ. 1) $R_{AB} = R_1 + \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right)^{-1} = 3{,}8r = 38$ Ом; 2) $I = \dfrac{U}{R_4} \cdot \dfrac{0{,}8r}{3{,}8r} = 0{,}2$ А.