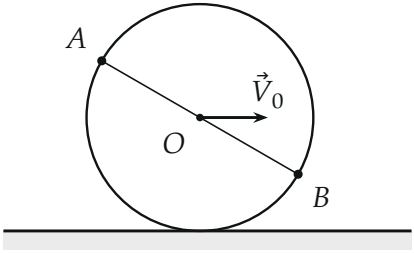
Катящееся колесо

Задача 1. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 1] Однородное колесо радиуса $R = 0{,}5$ м катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности и за время $T = 1{,}57$ с совершает один оборот. Точки A и B лежат на ободе колеса, AB — диаметр колеса.

1. С какой скоростью V_0 движется ось колеса?
2. С какой скоростью V_A движется точка A на ободе колеса, если точка B движется со скоростью $V_B = 2$ м/с?

Все скорости измерены в лабораторной системе отсчёта. Ось колеса движется равномерно.



Поясняющий рисунок: колесо катится вправо, AB — диаметр (положение диаметра — то, при котором $V_B = 2$ м/с, см. решение).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Качение без проскальзывания: нижняя точка колеса P, касающаяся дороги, в данный момент неподвижна. Поэтому каждое мгновение колесо как бы поворачивается вокруг точки касания, и скорость любой точки пропорциональна расстоянию до P. Отсюда сразу видно, что скорость оси — это скорость точки на расстоянии R от P, а V_B говорит, где на ободе сидит точка B. Класс задачи: кинематика качения, мгновенный центр скоростей.

Обозначения. O — ось колеса, P — точка касания с дорогой, ω — угловая скорость вращения колеса.

Пункт 1. Колесо катится без проскальзывания: за один оборот ось проходит путь, равный длине обода, $2\pi R$ (каждая точка обода по очере-

ди касается дороги). Ось движется равномерно, поэтому

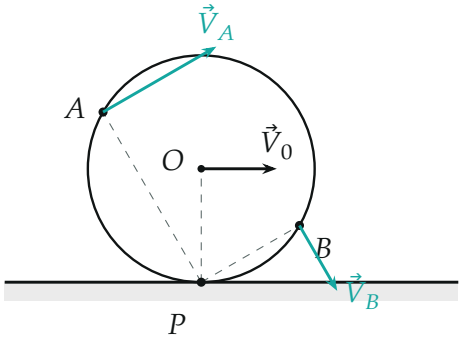
$$V_0 = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5}{1{,}57} = 2 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость $\omega = 2\pi/T$, и $V_0 = \omega R$.

Пункт 2.

1. Скорость точки обода. По закону сложения скоростей скорость точки обода — сумма скорости оси $\vec{V}_0$ и скорости вращения вокруг оси $\omega R = V_0$ по касательной. В нижней точке P они противоположны и дают нуль: P — мгновенный центр скоростей. Значит, скорость любой точки M колеса перпендикулярна PM и равна

$$V_M = \omega \cdot PM = \frac{V_0}{R} PM.$$



Мгновенный центр скоростей P: скорость каждой точки перпендикулярна отрезку до P и пропорциональна его длине. Векторы в масштабе ($V_0 = 2$ м/с — 1 см).

2. Где точка B**.** Из $V_B = \frac{V_0}{R} PB$:

$$PB = R \frac{V_B}{V_0} = R \cdot \frac{2}{2} = R.$$

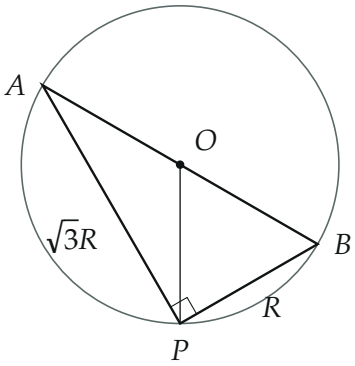
Хорда PB равна радиусу — значит, треугольник OPB равносторонний, и точка B повернута от нижней точки на 60°.

3. Точка A**.** Угол APB опирается на диаметр AB, поэтому он прямой (вписанный угол, опирающийся на диаметр). По теореме Пифагора в треугольнике APB:

$$PA^2 + PB^2 = AB^2 = 4R^2 \quad \Longrightarrow \quad PA = \sqrt{4R^2 - PB^2}.$$

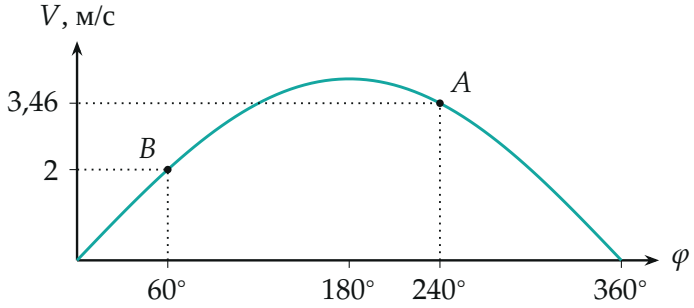
Умножим на V_0/R:

$$V_A = \sqrt{4V_0^2 - V_B^2} = \sqrt{4 \cdot 2^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5 \text{ м/с}.$$



Треугольник APB: угол при P прямой (опирается на диаметр), $PB = R$, $AB = 2R$, значит $PA = \sqrt{3}R$.

4. Как меняется скорость по ободу. Для точки обода, повернутой от P на угол φ (центральный угол), хорда $PM = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$, поэтому $V_M = 2V_0\sin\frac{\varphi}{2}$. У B угол 60° ($V_B = V_0$), у диаметрально противоположной A — 240° ($V_A = 2V_0\sin 120° = \sqrt{3}V_0$).



Скорость точки обода в зависимости от угла поворота от точки касания: $V = 2V_0 \sin\frac{\varphi}{2}$*; точки* B *и* A *разделены углом* $180°$.

Обратите внимание: V_B здесь задаёт не скорость колеса, а положение диаметра. Если бы точка B была в другом месте с той же скоростью — зеркально, на угле $300°$, — то A оказалась бы на $120°$, и ответ тот же: $2V_0 \sin 60°$. Ответ однозначен.

Проверка. Размерность очевидна. Второй способ — сложение векторов: скорость точки обода $\vec{V}_0 + \vec{v}_{\text{вр}}$, $|\vec{v}_{\text{вр}}| = V_0$; для диаметрально противоположных точек $\vec{v}_{\text{вр},A} = -\vec{v}_{\text{вр},B}$, поэтому $V_A^2 + V_B^2 = |\vec{V}_0 - \vec{v}|^2 + |\vec{V}_0 + \vec{v}|^2 = 2V_0^2 + 2v^2 = 4V_0^2$ — та же формула $V_A = \sqrt{4V_0^2 - V_B^2}$. Предел: если B — точка касания ($V_B = 0$), то A — верхняя точка, $V_A = 2V_0$, как и должно быть.

Ответ. 1) $V_0 = \dfrac{2\pi R}{T} = 2$ м/с; 2) $V_A = \sqrt{4V_0^2 - V_B^2} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ м/с.