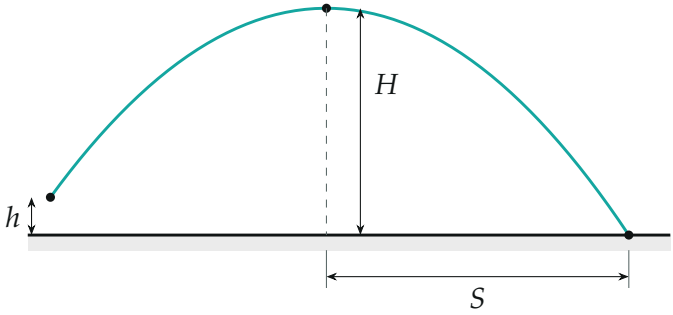
Мяч, отбитый теннисистом

Задача 2. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 2] Мяч, отбитый теннисистом на высоте $h = 0{,}5$ м, поднимается на максимальную высоту $H = 3$ м и за оставшееся время полёта перемещается по горизонтали на $S = 12$ м.

1. Через какое время T после удара мяч поднимется на максимальную высоту?
2. Найдите начальную скорость V_0 мяча.

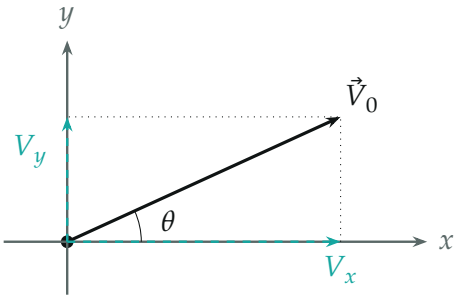
Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.



Поясняющий рисунок: траектория мяча по вычисленным точкам (масштаб по горизонтали в три раза мельче, чем по вертикали).

▲ **Решение. Что происходит.** После удара на мяч действует только сила тяжести: по горизонтали он летит равномерно, по вертикали — равноускоренно с ускорением g вниз. Эти два движения независимы. Высоты h и H задают вертикальное движение — из них найдём вертикальную скорость и время подъёма; время падения с H до земли и путь S дадут горизонтальную скорость. Класс задачи: бросок под углом к горизонту.

Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вертикально вверх от земли. V_x — горизонтальная составляющая скорости (постоянна), V_y — вертикальная составляющая сразу после удара, τ — время падения от высшей точки до земли.



Начальная скорость и её составляющие (в масштабе).

Пункт 1.

1. Вертикальная скорость после удара. В высшей точке вертикальная составляющая скорости равна нулю. Закон равноускоренного движения по оси y в форме «без времени»: $0 - V_y^2 = -2g\,(H-h)$:

$$V_y = \sqrt{2g\,(H-h)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 2{,}5} = \sqrt{50} \approx 7{,}07 \text{ м/с}.$$

2. Время подъёма. Вертикальная скорость убывает равномерно: $0 = V_y - gT$,

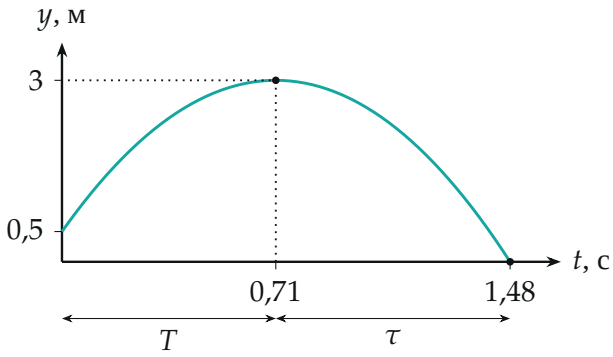
$$T = \frac{V_y}{g} = \sqrt{\frac{2\,(H-h)}{g}} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71 \text{ с}.$$

Пункт 2.

1. Время падения. От высшей точки мяч падает с высоты H с нулевой вертикальной скоростью: $H = \dfrac{g\tau^2}{2}$,

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{0{,}6} \approx 0{,}775 \text{ с}.$$

Время падения больше времени подъёма: падать до земли надо с H, а подниматься пришлось только с h.



Высота мяча от времени (парабола по вычисленным точкам): подъём $T \approx 0{,}71$ с, падение $\tau \approx 0{,}77$ с.

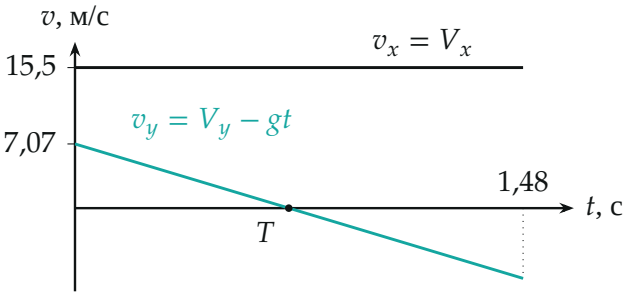
2. Горизонтальная скорость. По горизонтали движение равномерное, за время τ мяч прошёл S:

$$V_x = \frac{S}{\tau} = S\sqrt{\frac{g}{2H}} = \frac{12}{0{,}775} \approx 15{,}5 \text{ м/с}.$$

3. Начальная скорость. Составляющие V_x и V_y перпендикулярны, по теореме Пифагора

$$V_0 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\frac{gS^2}{2H} + 2g\,(H-h)} = \sqrt{240+50} = \sqrt{290} \approx 17 \text{ м/с}.$$

Угол вылета к горизонту: $\operatorname{tg}\theta = V_y/V_x = 0{,}46$, $\theta \approx 24{,}5°$.



Составляющие скорости от времени: горизонтальная постоянна, вертикальная убывает линейно и обращается в нуль в момент T.

Обратите внимание: S — путь не за весь полёт, а только за время падения от высшей точки, поэтому горизонтальную скорость находят по времени τ, а не $T + \tau$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$, $\sqrt{\text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м}/\text{с}$. Второй способ для V_0 — закон сохранения энергии от удара до высшей точки: $\frac{V_0^2}{2} = \frac{V_x^2}{2} + g\,(H-h)$, $V_0^2 = 240 + 50 = 290$ м^2/с^2 — то же.

Ответ. 1) $T = \sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}} \approx 0{,}71$ с; 2) $V_0 = \sqrt{\dfrac{gS^2}{2H} + 2g(H-h)} = \sqrt{290} \approx 17$ м/с.