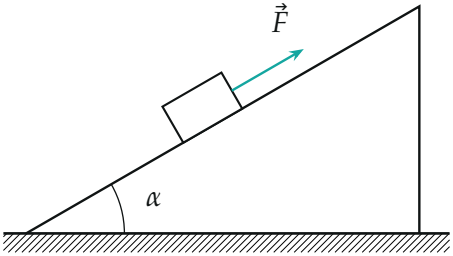
Равномерное движение бруска по наклонной плоскости

Задача 3. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 3] Чтобы спускать брусок равномерно по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту, следует приложить силу F_1, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, а чтобы равномерно втаскивать брусок вверх, следует приложить такую же по направлению силу F_2.

1. Найдите коэффициент μ трения скольжения бруска по плоскости, если $F_2 = 2F_1$.
2. Какую по величине V_0 скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, следует сообщить бруску, чтобы он остановился на расстоянии $S = 1{,}35$ м от точки старта? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: сила $\vec{F}$ приложена вдоль наклонной плоскости вверх. При спуске она равна F_1, при подъёме — F_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Брусок движется равномерно, значит, его ускорение равно нулю и сумма сил равна нулю — это задача на второй закон Ньютона с нулевым ускорением. Сила $\vec{F}$ в обоих случаях направлена вверх по склону, а сила трения скольжения всегда против скорости: при спуске она смотрит вверх по склону и помогает силе $\vec{F}$, при подъёме — вниз и мешает ей. Поэтому $F_2 > F_1$, и по отношению F_2/F_1 находится μ. Во втором пункте силы $\vec{F}$ нет: брусок тормозится составляющей силы тяжести и трением с постоянным ускорением.

Обозначения. m — масса бруска, $\vec{N}$ — сила реакции плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения скольжения, $F_{\text{тр}} = \mu N$. Ось x — вдоль склона вверх, ось y — по нормали к склону. Зачем так: ускорение и скорость направлены вдоль склона, по оси y ускорения нет, и сила N находится сразу.

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для бруска при равномерном спуске. Ускорение равно нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} = 0.$$

Скорость направлена вниз по склону, поэтому трение — вверх, вдоль $+x$. Проекции:

$$\begin{aligned} y: &\quad N - mg\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N = mg\cos\alpha, \\ x: &\quad F_1 + \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

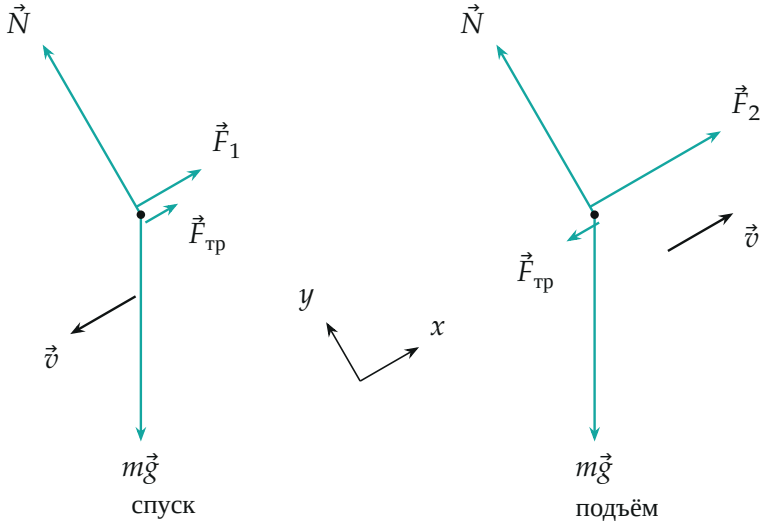


Схема «тело m» при спуске (слева) и при подъёме (справа). Трение направлено против скорости $\vec{v}$. Длины стрелок — по расчёту: $N \approx 0{,}87\,mg$, $F_{тр} \approx 0{,}17\,mg$, $F_1 \approx 0{,}33\,mg$, $F_2 \approx 0{,}67\,mg$.

2. Второй закон Ньютона для бруска при равномерном подъёме. Теперь скорость направлена вверх, трение — вниз по склону, вдоль $-x$; сила N та же:

$$x:\ F_2 - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0.$$

3. Коэффициент трения. Выразим силы и разделим одну на другую, чтобы ушли m и g:

$$F_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad F_2 = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = 2.$$

Отсюда $\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 2\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha$, то есть $3\mu\cos\alpha = \sin\alpha$:

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}19.$$

Второй способ. Сложим и вычтем выражения для сил: $F_2 + F_1 = 2mg\sin\alpha$, $F_2 - F_1 = 2\mu mg\cos\alpha$. Разность сил — это удвоенная сила трения, сумма — удвоенная составляющая силы тяжести вдоль склона. Тогда

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{3},$$

то же самое.

Пункт 2.

4. Второй закон Ньютона для бруска без силы $\vec{F}$. Брусок едет вверх, трение направлено вниз по склону. Ускорение вдоль оси x:

$$ma_x = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

$$a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = -g\Big(\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{3}\Big) = -\frac{4}{3}g\sin\alpha = -\frac{2}{3}g.$$

Ускорение постоянно (все силы постоянны), брусок тормозится равнозамедленно с модулем ускорения $a = \frac{2}{3}g \approx 6{,}7$ м/с^2.

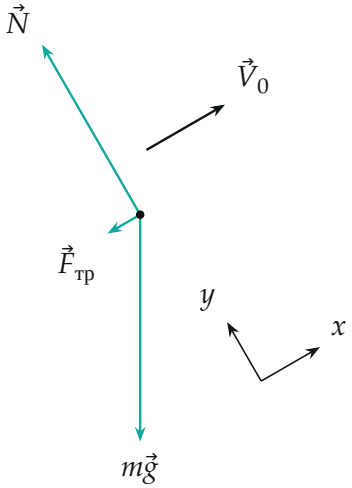
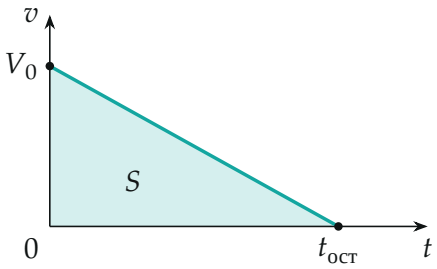


Схема «тело m» в пункте 2: силы $\vec{F}$ нет, брусок едет вверх, трение направлено вниз по склону.

5. Кинематика равнозамедленного движения. От старта до остановки скорость падает от V_0 до нуля на пути S:

$$0 - V_0^2 = 2a_x S \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{2aS} = \sqrt{\frac{4}{3}gS} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2 \text{ м/с}.$$

Время торможения $t_{ост} = V_0/a \approx 0{,}64$ с.



Скорость бруска в пункте 2: прямая с наклоном $-a$. Площадь треугольника равна пути S.

Второй способ: энергия. Работа силы тяжести на пути S вверх равна $-mgS\sin\alpha$, работа трения $-\mu mg\cos\alpha \cdot S$, сила N работы не совершает.

По теореме о кинетической энергии

$$0 - \frac{mV_0^2}{2} = -mgS\sin\alpha - \mu mgS\cos\alpha,$$

$$V_0^2 = 2gS(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = \frac{4}{3}gS,$$

то же самое.

Обратите внимание. Здесь $\mu = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha$: сила трения покоя не удержит брусок, и после остановки он поедет вниз. «Остановился на расстоянии S» — это точка поворота, где скорость на мгновение обращается в нуль. Поэтому ускорение на пути вверх считаем только с трением, направленным вниз по склону.

Проверка. Размерности: μ безразмерен, $\sqrt{gS}$ — м/с. Предел: при $\mu \to 0$ формулы дают $F_1 = F_2 = mg\sin\alpha$ — без трения на равномерное движение вверх и вниз нужна одна и та же сила; и $V_0 = \sqrt{2gS\sin\alpha}$ — подъём на высоту $S\sin\alpha$ по закону сохранения энергии. Трение добавляет к торможению треть от составляющей силы тяжести, поэтому скорость нужна больше: 4,2 м/с против 3,7 м/с без трения.

Ответ. 1) $\mu = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}19$; 2) $V_0 = \sqrt{\dfrac{4}{3}gS} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ м/с.