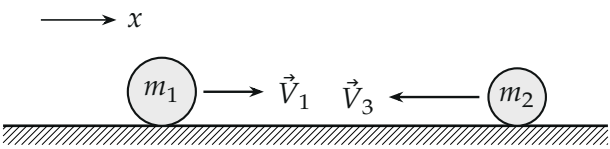
Упругий центральный удар шайб

Задача 4. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 4] Две шайбы, скорости которых $V_1 = 2$ м/с и $V_3 = 3$ м/с, движутся навстречу друг другу по гладкой горизонтальной плоскости и испытывают абсолютно упругий центральный удар. Массы шайб $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг.

1. Найдите максимальную энергию E деформации шайб в процессе соударения.
2. Через какое время T после соударения расстояние между шайбами будет равно $L = 2$ м?



Поясняющий рисунок: шайбы движутся навстречу по одной прямой (удар центральный). Вид сбоку.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на удар двух тел. При соударении шайбы сжимаются: пока скорость одной относительно другой не равна нулю, они продолжают сближаться и деформация растёт. Наибольшая деформация — в момент, когда скорости шайб сравнялись. Импульс системы сохраняется всё время удара, а механическая энергия — нет: часть кинетической энергии временно запасена в упругой деформации. Удар абсолютно упругий, поэтому после удара вся энергия деформации снова переходит в кинетическую.

Обозначения. Ось x — по скорости первой шайбы. u — общая скорость шайб в момент наибольшей деформации, u_1, u_2 — проекции скоростей шайб после удара. До удара проекции скоростей: $V_1 = 2$ м/с и $-V_3 = -3$ м/с.

Пункт 1.

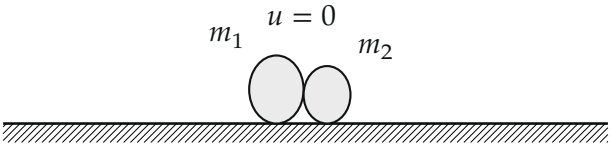
1. Закон сохранения импульса системы двух шайб от начала удара до момента наибольшей деформации. Плоскость гладкая, сила тяжести и реакция плоскости вертикальны и уравновешены, горизонтальных

внешних сил нет — импульс системы вдоль x сохраняется:

$$m_1V_1 - m_2V_3 = (m_1 + m_2)\,u,$$

$$u = \frac{m_1V_1 - m_2V_3}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}3 \cdot 2 - 0{,}2 \cdot 3}{0{,}5} = 0.$$

Импульсы шайб равны по модулю (0,6 кг·м/с) и противоположны: суммарный импульс равен нулю, центр масс системы покоится. В момент наибольшей деформации обе шайбы на мгновение останавливаются.



Момент наибольшей деформации: скорости шайб равны. Здесь общая скорость $u = 0$ — шайбы на мгновение покоятся, вся кинетическая энергия ушла в деформацию.

2. Закон сохранения энергии системы между началом удара и моментом наибольшей деформации. Удар упругий, силы деформации консервативны: кинетическая энергия до удара равна кинетической энергии в этот момент плюс энергия деформации E:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_3^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + E.$$

При $u = 0$

$$E = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_3^2}{2} = \frac{0{,}3 \cdot 4}{2} + \frac{0{,}2 \cdot 9}{2} = 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}5 \text{ Дж}.$$

Второй способ: система центра масс. В общем случае E равна кинетической энергии движения шайб относительно центра масс:

$$E = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(V_1 + V_3)^2}{2} = \frac{0{,}06}{0{,}5} \cdot \frac{25}{2} = 1{,}5 \text{ Дж},$$

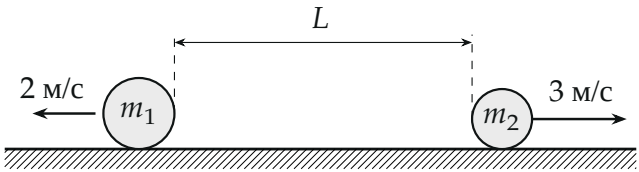
здесь $V_1 + V_3 = 5$ м/с — скорость сближения. Ответ тот же; у нас центр масс покоится, и лабораторная система совпадает с системой центра масс.

Пункт 2.

3. Скорости после упругого удара. Запишем законы сохранения импульса и энергии системы между состояниями «до удара» и «после удара»:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0, \qquad \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_3^2}{2}.$$

Суммарный импульс равен нулю и до, и после удара, а энергия та же. Решение, отличное от исходного ($u_1 = V_1$, $u_2 = -V_3$, — это «удара не было»), — скорости просто поменяли знак: $u_1 = -V_1 = -2$ м/с, $u_2 = V_3 = 3$ м/с. В системе центра масс упругий удар всегда только разворачивает скорости. Проверим: импульс $0{,}3 \cdot (-2) + 0{,}2 \cdot 3 = 0$, энергия $0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}5$ Дж — верно.



После удара шайбы разлетаются с прежними по модулю скоростями; расстояние L между ними растёт со скоростью $V_1 + V_3$.

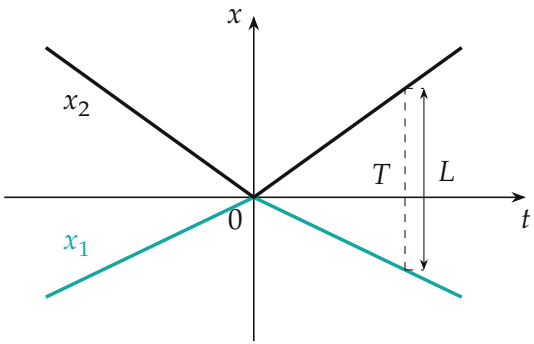
4. Время до расстояния L. В момент окончания удара шайбы касаются, расстояние между ними равно нулю. Дальше они удаляются друг от друга с относительной скоростью

$$u_2 - u_1 = V_3 + V_1 = 5 \text{ м/с},$$

и

$$T = \frac{L}{V_1 + V_3} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \text{ с}.$$

Длительность удара и размеры шайб малы по сравнению с T и L — мы их не учитываем.



Координаты шайб (удар в момент $t = 0$ в точке $x = 0$): до удара шайбы сближаются, после — разлетаются. Вертикальный отрезок между прямыми в момент T равен L. Наклоны прямых: ± 2 и ∓ 3 м/с.

Обратите внимание. Энергия деформации — не вся кинетическая энергия системы, а только её часть, связанная с относительным движением. Здесь они совпали лишь потому, что импульсы шайб равны и центр масс покоится; при других данных шайбы в момент наибольшего сжатия движутся вместе, и эта часть энергии в деформацию не уходит.

Проверка. Размерности: mV^2 — джоуль, L/V — секунда. Предел: если бы вторая шайба была бесконечно тяжёлой стенкой ($m_2 \to \infty$), формула второго способа дала бы $E = \frac{1}{2}m_1(V_1 + V_3)^2$ — вся кинетическая энергия налетающей шайбы в системе стенки. Знаки: после удара первая шайба летит назад, вторая — вперёд, импульс системы остался нулевым.

Ответ. 1) $E = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} + \dfrac{m_2 V_3^2}{2} = 1{,}5$ Дж; 2) $T = \dfrac{L}{V_1 + V_3} = 0{,}4$ с.