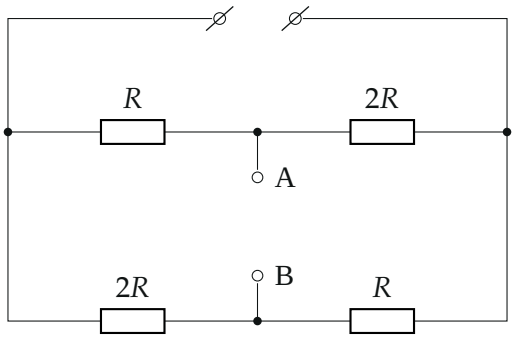
Цепь с вольтметром и амперметром

Задача 5. [Физтех 2019/20, 9 класс, задача 5] Электрическая цепь состоит из идеального источника постоянного напряжения и четырёх резисторов (см. рис.). Если к клеммам A и B подключить идеальный вольтметр, то он покажет напряжение $U = 4$ В. Если вольтметр заменить идеальным амперметром, он покажет силу тока $I = 30$ мА.



1. Найдите напряжение U_0 источника.
2. Какая мощность P будет рассеиваться в цепи при подключенном вольтметре?

▲ **Решение. Что происходит.** Источник подключён к двум общим проводам — левому и правому. Между ними две ветви, в каждой по два резистора, и клеммы A и B выведены из середин ветвей. Идеальный вольтметр тока не берёт: ветви работают как два независимых делителя напряжения, и вольтметр показывает разность потенциалов их средних точек. Идеальный амперметр замыкает A и B накоротко: схема становится другой — две пары параллельных резисторов последовательно, и амперметр показывает ток, который перетекает из верхней ветви в нижнюю. Класс задачи — эквивалентные схемы и метод потенциалов.

Обозначения. Потенциал правого провода примем за нуль, тогда потенциал левого равен U_0 (полярность источника на ответы не влияет). M и N — средние точки верхней и нижней ветвей (к ним подключены клеммы A и B), φ_M, φ_N — их потенциалы.

Пункт 1.

1. Вольтметр: два делителя напряжения. Через вольтметр ток не идёт, поэтому в каждой ветви через оба резистора течёт один ток. Сопротивление каждой ветви $R + 2R = 3R$, к ней приложено U_0, ток ветви по закону Ома

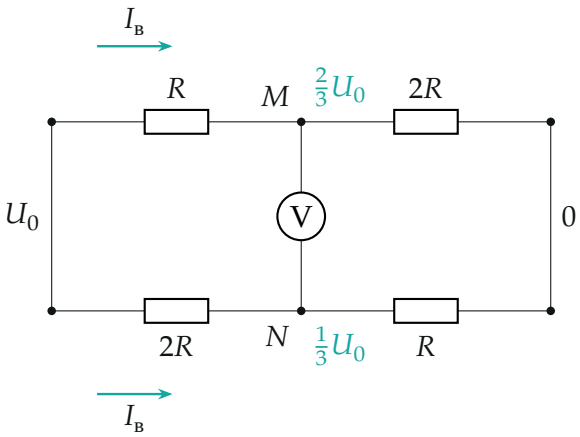
$$I_в = \frac{U_0}{3R}.$$

В верхней ветви от левого провода до точки M стоит R, в нижней до точки N — $2R$. Потенциал падает вдоль тока:

$$\varphi_M = U_0 - I_в R = \frac{2}{3}U_0, \qquad \varphi_N = U_0 - I_в \cdot 2R = \frac{1}{3}U_0.$$

Показание вольтметра

$$U = \varphi_M - \varphi_N = \frac{U_0}{3} \quad \Rightarrow \quad U_0 = 3U = 12\ \text{В}.$$



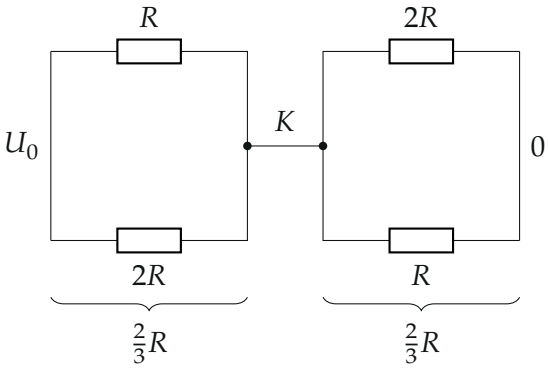
Цепь с вольтметром: левый провод под потенциалом U_0, правый — под нулём. Бирюзой — потенциалы средних точек; в обеих ветвях ток $I_в = U_0/(3R)$.

2. Амперметр: точки M и N соединены. Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление, поэтому M и N становятся одним узлом K. Между левым проводом и узлом K теперь параллельно стоят R (верхний) и $2R$ (нижний), между узлом K и правым проводом — $2R$ (верхний)

и R (нижний):

$$R_{\text{лев}} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R, \qquad R_{\text{прав}} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R.$$

Половинки одинаковы, поэтому напряжение делится пополам: $\varphi_K = \dfrac{U_0}{2}$.



Эквивалентная схема с амперметром: M и N слились в узел K. Слева и справа от него по паре параллельных резисторов с одинаковым сопротивлением $\frac{2}{3}R$, поэтому $\varphi_K = U_0/2$.

3. Ток через амперметр — первое правило Кирхгофа для точки M. Ток верхнего левого резистора R приходит в M, ток верхнего правого резистора $2R$ уходит из M вправо, разница уходит через амперметр вниз, в точку N:

$$I_1 = \frac{U_0 - \varphi_K}{R} = \frac{U_0}{2R}, \qquad I_2 = \frac{\varphi_K - 0}{2R} = \frac{U_0}{4R},$$

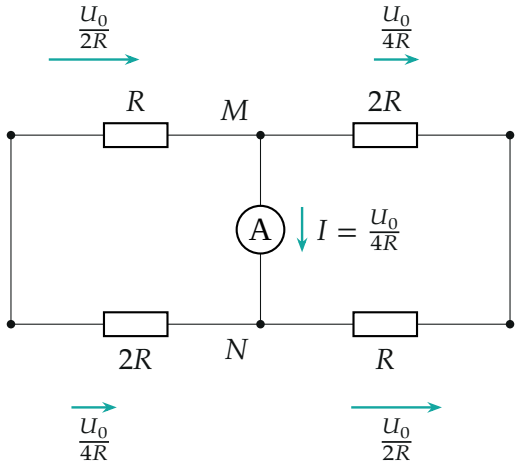
$$I = I_1 - I_2 = \frac{U_0}{4R}.$$

Проверим по точке N: туда приходят ток нижнего левого резистора $2R$ и ток амперметра, уходит ток нижнего правого резистора R:

$$\frac{U_0}{4R} + \frac{U_0}{4R} = \frac{U_0}{2R} \text{ — сходится.}$$

Отсюда сопротивление

$$R = \frac{U_0}{4I} = \frac{12}{4 \cdot 0{,}03} = 100 \text{ Ом}.$$



Токи с амперметром (длины стрелок пропорциональны токам). В верхней ветви ток слева больше, чем справа; избыток $U_0/(4R)$ стекает через амперметр в нижнюю ветвь, где ток справа больше, чем слева.

Пункт 2.

4. Мощность при вольтметре. Цепь — две параллельные ветви по $3R$, на каждой напряжение U_0. Мощность на ветви $U_0^2/(3R)$, всего

$$P = 2 \cdot \frac{U_0^2}{3R} = \frac{2U_0^2}{3R} = \frac{2 \cdot 144}{300} = 0{,}96 \text{ Вт}.$$

Её же можно записать только через данные условия: $U_0 = 3U$ и $R = U_0/(4I) = 3U/(4I)$, поэтому

$$P = \frac{2 \cdot 9U^2 \cdot 4I}{3 \cdot 3U} = 8UI = 8 \cdot 4 \cdot 0{,}03 = 0{,}96 \text{ Вт}.$$

Обратите внимание. Вольтметр и амперметр, подключённые к одним и тем же клеммам, дают две разные схемы. Нельзя считать, что по-

казание амперметра равно U/R_{AB} с каким-то «сопротивлением между A и B» при неизменных токах: замыкание A и B перераспределяет токи во всей цепи.

Проверка. Размерности: $U_0/(4I)$ — омы, U^2/R и UI — ватты. Второй способ для тока амперметра: по теореме об эквивалентном источнике цепь со стороны клемм A и B — источник с напряжением холостого хода $U = U_0/3$ и внутренним сопротивлением r (сам источник при этом закорачиваем):

$$r = \frac{R \cdot 2R}{3R} + \frac{2R \cdot R}{3R} = \frac{4}{3}R, \qquad \frac{U}{r} = \frac{U_0/3}{4R/3} = \frac{U_0}{4R}$$

— ток короткого замыкания тот же. Знак: потенциал M выше, чем N, поэтому ток через амперметр идёт от A к B.

Ответ. 1) $U_0 = 3U = 12$ В; 2) $P = \dfrac{2U_0^2}{3R} = 8UI = 0{,}96$ Вт (здесь $R = \dfrac{U_0}{4I} = 100$ Ом).