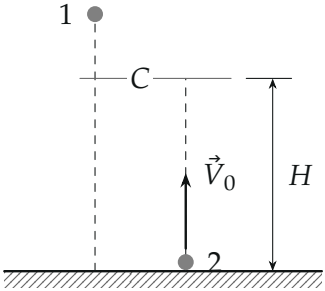
Мячи, брошенные вверх с задержкой

Задача 1. [Физтех 2020/21, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 1] Мальчик бросает вертикально вверх мяч. В момент, когда мяч достиг максимальной высоты, мальчик бросает вертикально вверх второй мяч, с того же места и с той же скоростью, что и первый. В результате мячи столкнулись на высоте H от места броска. Сопротивление воздуха не учитывать.

1. Найти время полёта второго мяча до столкновения.
2. Найти начальную скорость мячей.
3. Какой путь прошёл первый мяч до столкновения?



Поясняющий рисунок: первый мяч в верхней точке, в этот момент брошен второй; встреча — на высоте H (мячи разнесены по горизонтали для наглядности).

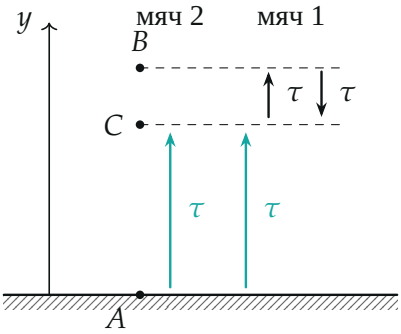
▲ **Решение.** **Что происходит.** Оба мяча летят с одним ускорением $\vec{g}$ — равноускоренное движение по вертикали. Второй мяч — точная копия первого, запущенная позже на время подъёма первого. Движение с постоянным ускорением симметрично во времени: подъём до точки C и спуск от верхней точки до C занимают одинаковое время. Отсюда и найдём связь времён.

Обозначения. Ось y — вверх от точки броска; A — точка броска, B — верхняя точка, C — точка столкновения; V_0 — начальная скорость; $t_0 = V_0/g$ — время подъёма до B; τ — время полёта второго мяча до столкновения.

Пункт 1.

1. Связь времён. Второй мяч летит от A до C за τ. Первый мяч, который движется точно так же, тоже прошёл $A \to C$ за τ (на подъёме). Из-за симметрии он спускается $B \to C$ за то же время, что поднимался $C \to B$, то есть за $t_0 - \tau$. Но со спуска первого мяча от B и с броска второго прошло одно и то же время τ (второй брошен в момент, когда первый в B). Значит,

$$t_0 - \tau = \tau \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2\tau, \qquad V_0 = gt_0 = 2g\tau.$$



Этапы. Мяч 2: $A \to C$ за τ. Мяч 1: $A \to C$ за τ, $C \to B$ и обратно $B \to C$ — по τ. Итого подъём $A \to B$ длится 2τ, а столкновение — через 3τ после первого броска.

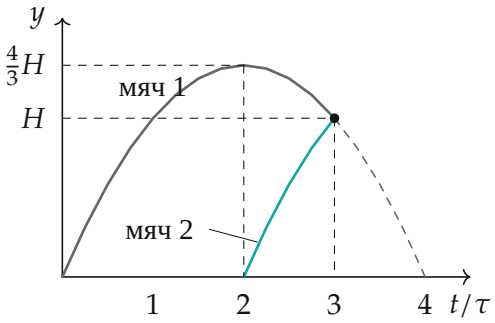
2. Закон движения второго мяча. Равноускоренное движение, в проекции на ось y: $V_{0y} = V_0, g_y = -g$. В момент столкновения он на высоте H:

$$H = V_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 2g\tau^2 - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{3}{2}g\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2H}{3g}}.$$

Пункт 2.

3. Начальная скорость. Из шага 1:

$$V_0 = 2g\tau = 2g\sqrt{\frac{2H}{3g}} = 2\sqrt{\frac{2gH}{3}}.$$



Координаты мячей по закону движения (точки по формуле $y = V_0 t - gt^2/2$, $V_0 = 2g\tau$). Кривые пересекаются при $t = 3\tau$ на высоте $H = \frac{3}{2}g\tau^2$; вершина первой — $\frac{4}{3}H$.

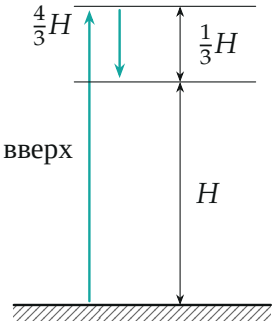
Пункт 3.

4. Путь первого мяча. Путь — длина траектории, а не перемещение: мяч поднялся до B и спустился до C. Максимальная высота — из закона сохранения энергии $\frac{mV_0^2}{2} = mgh_{\max}$:

$$h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{4g^2\tau^2}{2g} = 2g\tau^2 = \frac{4}{3}H.$$

Спуск $B \to C$ — падение без начальной скорости за τ: $h_{BC} = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{1}{3}H$. Путь

$$S = h_{\max} + h_{BC} = \frac{4}{3}H + \frac{1}{3}H = \frac{5}{3}H.$$



Путь первого мяча: вверх на $\frac{4}{3}H$, затем вниз на $\frac{1}{3}H$ до встречи.

Обратите внимание. Мячи встречаются, когда первый уже *падает*; путь первого мяча поэтому больше H: он прошёл отрезок CB дважды.

Проверка. Размерности: $\sqrt{H/g}$ — с, $\sqrt{gH}$ — м/с. Второй способ для пункта 1 — закон движения первого мяча: в момент 3τ он тоже на высоте H: $V_0 \cdot 3\tau - \frac{g(3\tau)^2}{2} = 6g\tau^2 - \frac{9}{2}g\tau^2 = \frac{3}{2}g\tau^2 = H$ — совпало. Перемещение первого мяча H, путь $\frac{5}{3}H$ — разница $\frac{2}{3}H$ равна удвоенному отрезку CB.

Ответ. 1) $\tau = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$; 2) $V_0 = 2\sqrt{\frac{2gH}{3}}$; 3) $S = \frac{5}{3}H$.