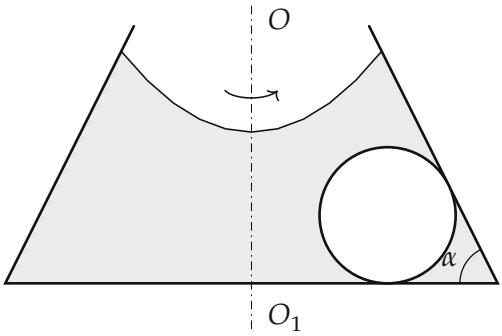
Шар в воде во вращающемся коническом сосуде

Задача 2. [Физтех 2020/21, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 2] Конический сосуд с водой и шаром, лежащим на дне сосуда, вращаются вокруг вертикальной оси OO_1 с угловой скоростью ω (см. рис.). Плотность воды ρ, плотность шара 3ρ. Радиус шара R, центр шара находится на расстоянии $2R$ от оси вращения. Угол между горизонтальным дном и боковой стенкой сосуда α ($\operatorname{tg}\alpha = 2$). Внутренняя поверхность сосуда гладкая.



1. С какой силой N_1 шар давил бы на дно, если бы сосуд не вращался?
2. Найти силу N_2 давления шара на дно при вращении сосуда.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на второй закон Ньютона при движении по окружности в жидкости. Шар вращается вместе с сосудом и водой: его центр движется по окружности радиуса $2R$, ускорение — центростремительное, $\omega^2 \cdot 2R$. Вода давит на шар; в покое сумма её давлений — обычная сила Архимеда вверх. При вращении давление в воде растёт к краю, и у силы Архимеда появляется горизонтальная составляющая к оси. Но шар втрое плотнее воды, ему нужна бóльшая центростремительная сила — её добирает наклонная стенка, прижимая шар к дну. Поэтому давление на дно растёт.

Обозначения. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объём шара, $r = 2R$ — расстояние от его центра до оси; $\vec{N}$ — реакция дна, $\vec{Q}$ — реакция стенки (по нормали к ней, стенка гладкая); $\vec{F}_A$ — сила Архимеда, F_{Ax} и F_{Ay} — её составляющие; ось x — горизонтально к оси вращения, ось y — вверх.

Пункт 1.

1. Условие равновесия шара в неподвижном сосуде. На шар действуют сила тяжести $3\rho Vg$ вниз, сила Архимеда ρVg вверх и реакция дна N_1 вверх. Стенка в покое не нужна: шар бы лежал так же и без неё, $Q = 0$. В проекции на y:

$$N_1 + \rho Vg - 3\rho Vg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2\rho Vg = \frac{8}{3}\pi R^3 \rho g.$$

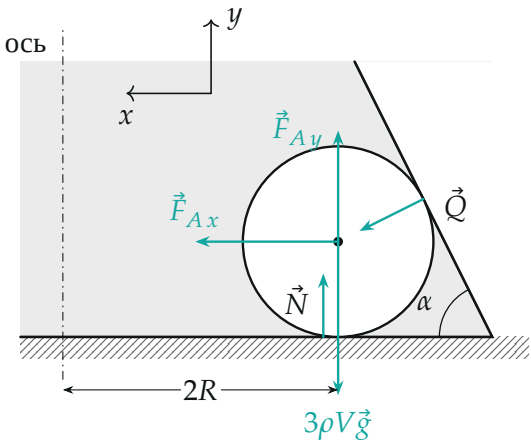
По третьему закону Ньютона шар давит на дно с той же силой.

Пункт 2.

2. Сила Архимеда во вращающейся воде. Сила Архимеда — равнодействующая давлений воды на поверхность шара — не зависит от того, что внутри. Мысленно заменим шар водой. Этот «водяной шар» массой ρV вращается вместе со всей водой по той же окружности, и окружающая вода сообщает ему ускорение $\omega^2 r$ к оси и держит против тяжести. Второй закон Ньютона для водяного шара:

$$F_{Ax} = \rho V \omega^2 r, \qquad F_{Ay} = \rho Vg.$$

(Мелочь: шар касается дна, и под точкой касания воды нет; в задаче, как и обычно, этим пренебрегаем.)

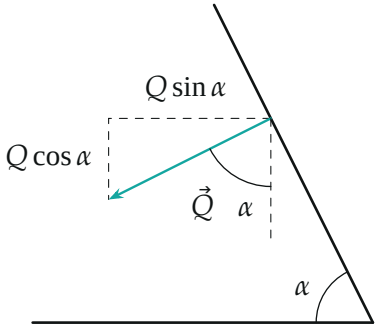


Силы на шар при вращении: тяжесть $3\rho V\vec{g}$, реакция дна $\vec{N}$, реакция стенки

$\vec{Q}$ по нормали к ней (к центру шара), составляющие силы Архимеда $\vec{F}_{A\,x}$ к оси и $\vec{F}_{A\,y}$ вверх. Оси: x — к оси вращения, y — вверх.

3. Направление реакции стенки. Стенка гладкая, значит, $\vec{Q}$ перпендикулярна ей и проходит через центр шара. Стенка наклонена к дну под углом α, поэтому нормаль к ней наклонена к вертикали под тем же углом α (углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Нормаль смотрит внутрь сосуда — к оси и *вниз*:

$$Q_x = Q\sin\alpha, \qquad Q_y = -Q\cos\alpha.$$



Реакция гладкой стенки перпендикулярна стенке. Угол между $\vec{Q}$ и вертикалью равен α: горизонтальная составляющая $Q\sin\alpha$ (к оси), вертикальная $Q\cos\alpha$ (вниз).

4. Второй закон Ньютона для шара в проекциях. Масса шара $3\rho V$, ускорение $\omega^2 r$ по оси x, по y — ноль:

$$x:\ F_{A\,x}+Q\sin\alpha = 3\rho V\omega^2 r, \qquad y:\ N+F_{A\,y}-3\rho Vg-Q\cos\alpha = 0.$$

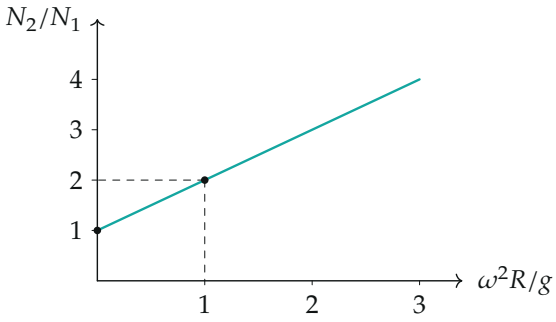
5. Решаем. Из проекции на x с учётом шага 2:

$$Q\sin\alpha = 3\rho V\omega^2 r - \rho V\omega^2 r = 2\rho V\omega^2 r \quad\Rightarrow\quad Q\cos\alpha = \frac{2\rho V\omega^2 r}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Из проекции на y:

$$N_2 = 3\rho Vg - \rho Vg + Q\cos\alpha = 2\rho V\Big(g + \frac{\omega^2 r}{\operatorname{tg}\alpha}\Big)$$
$$= 2\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\Big(g + \frac{\omega^2\cdot 2R}{2}\Big) = \frac{8}{3}\pi R^3\rho\,(g+\omega^2 R).$$

6. Что получилось. Добавка $Q\cos\alpha$ — это вертикальная составляющая той силы, которой стенка «доталкивает» шар до нужного центростремительного ускорения. Вода даёт тяжёлому шару только $\frac{1}{3}$ нужной горизонтальной силы, остальные $\frac{2}{3}$ — стенка, а вместе с ними она прижимает шар к дну.



Отношение $N_2/N_1 = 1 + \omega^2 R/g$: при $\omega = 0$ — покой, при $\omega^2 R = g$ шар давит на дно вдвое сильнее.

Обратите внимание. Сила Архимеда во вращающейся жидкости не вертикальна: у неё есть горизонтальная составляющая $\rho V\omega^2 r$ к оси. Если её забыть, ответ выйдет $\frac{8}{3}\pi R^3\rho(g + \frac{3}{2}\omega^2 R)$ — неверный.

Проверка. Размерность: $[\rho R^3\omega^2 R] = \text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$. Предел $\omega \to 0$: $N_2 \to N_1$ — совпадает с пунктом 1. Предел $\alpha \to 90°$ (вертикальная стенка, $\operatorname{tg}\alpha \to \infty$): стенка давит горизонтально и на дно не влияет, $N_2 \to N_1$ — так и должно быть. Предел шара плотности воды: $Q = 0$, $N_2 = 0$ — шар «плавает» в равновесии, как кусок самой воды.

Ответ. 1) $N_1 = \frac{8}{3}\pi R^3\rho g$; 2) $N_2 = \frac{8}{3}\pi R^3\rho\,(\omega^2 R + g)$.