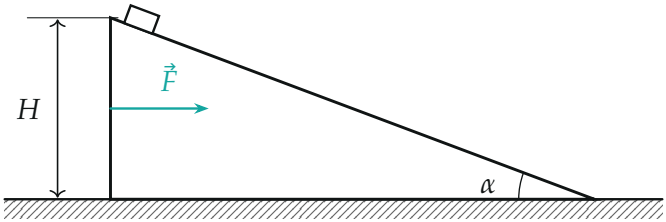
Клин, на который действует горизонтальная сила

Задача 4. [Физтех 2020/21, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 4] На гладкой горизонтальной поверхности стола находится клин. Гладкая поверхность клина составляет угол α ($\cos\alpha = \frac{4}{5}$) с горизонтом (см. рис.). На вершине клина на высоте H удерживают небольшую по размерам шайбу массой m. Масса клина $3m$.



1. За какое время шайба съедет с клина, если клин удерживать, а шайбу отпустить?

На покоившийся вначале клин стали действовать с постоянной горизонтальной силой $F = 2mg$, а шайбу отпустили. В результате клин стал двигаться поступательно по столу, а шайба вниз по клину.

2. Найти ускорение клина.
3. Через какое время шайба достигнет стола?

Направления всех движений в одной вертикальной плоскости.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на второй закон Ньютона для связанных тел и сложение ускорений. В первом случае клин неподвижен — шайба скатывается с гладкой наклонной плоскости с ускорением $g\sin\alpha$. Во втором клин толкают вправо, и он уходит «из-под» шайбы: шайба движется вдоль клина *относительно* него, а относительно стола её ускорение — сумма ускорения клина и относительного ускорения. Время спуска определяет относительное ускорение вдоль склона: длина склона относительно клина одна и та же.

Обозначения. $M = 3m$ — масса клина; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $L = H/\sin\alpha$ — длина склона; $\vec{N}$ — сила реакции клина на шайбу (по нормали, клин гладкий); $\vec{P}$ — реакция стола на клин; a — ускорение кли-

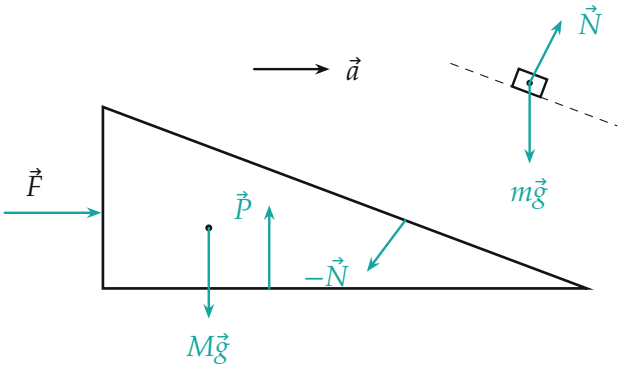
на (вправо); a_0 — ускорение шайбы относительно клина (вдоль склона вниз).

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для шайбы на неподвижном клине в проекции на ось вдоль склона вниз: $mg\sin\alpha = ma_1$, $a_1 = g\sin\alpha$. Движение равноускоренное без начальной скорости:

$$L = \frac{a_1 t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g\sin^2\alpha}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Пункт 2.

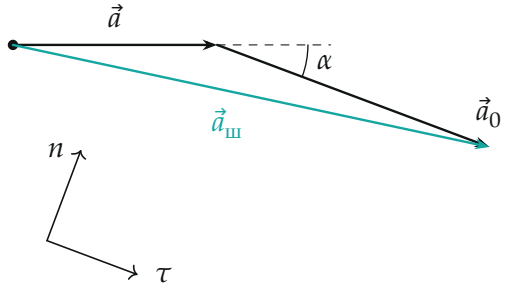


Силы на клин: $\vec{F}$, тяжесть $M\vec{g}$, реакция стола $\vec{P}$, давление шайбы $-\vec{N}$ (по нормали к склону, вниз-влево). Силы на шайбу (справа, отдельно): тяжесть $m\vec{g}$ и реакция $\vec{N}$ по нормали к склону.

2. Сложение ускорений. Шайба движется вдоль склона относительно клина, а клин движется поступательно. Поэтому ускорение шайбы относительно стола

$$\vec{a}_{\text{ш}} = \vec{a} + \vec{a}_0,$$

$\vec{a}$ — переносное (клина), $\vec{a}_0$ — относительное (вдоль склона).



Ускорение шайбы относительно стола — сумма ускорения клина $\vec{a}$ (горизонтально) и относительного $\vec{a}_0$ (вдоль склона). Оси: τ — вдоль склона вниз, n — по нормали к склону.

3. Проекции ускорения шайбы. На нормаль n к склону (вверх от склона): $\vec{a}_0$ не проецируется, $a_n = a\sin\alpha$. На ось τ вдоль склона вниз: $a_\tau = a_0 + a\cos\alpha$.

4. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на нормаль n:

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad N = m(g\cos\alpha + a\sin\alpha).$$

5. Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь (вправо). Шайба давит на клин с силой $-\vec{N}$, её горизонтальная составляющая $N\sin\alpha$ направлена влево:

$$F - N\sin\alpha = Ma.$$

6. Ускорение клина. Подставляем N:

$$F - mg\sin\alpha\cos\alpha - ma\sin^2\alpha = Ma,$$

$$a = \frac{F - mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} = \frac{2 - \frac{12}{25}}{3 + \frac{9}{25}}\,g = \frac{38}{84}\,g = \frac{19}{42}\,g.$$

Пункт 3.

7. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на ось τ**.** Вдоль

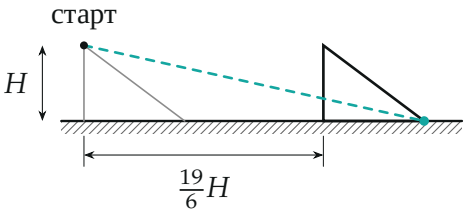
склона действует только $mg\sin\alpha$ ($\vec{N}$ перпендикулярна склону):

$$mg\sin\alpha = m(a_0 + a\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad a_0 = g\sin\alpha - a\cos\alpha = \left(\frac{3}{5} - \frac{19}{42}\cdot\frac{4}{5}\right)g = \frac{5}{21}g.$$

Клин «уезжает» вправо, и относительно него шайба скользит медленнее, чем по неподвижному ($\frac{5}{21}g < \frac{3}{5}g$).

8. Время. Относительно клина шайба проходит склон $L = H/\sin\alpha$ равноускоренно без начальной скорости:

$$\frac{H}{\sin\alpha} = \frac{a_0 t_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2H}{a_0\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2H\cdot 21\cdot 5}{5g\cdot 3}} = \sqrt{\frac{14H}{g}}.$$



Клин в начале (серый) и в момент t_2 (чёрный, сдвинулся на $\frac{at_2^2}{2} = \frac{19}{6}H$); бирюзовый пунктир — траектория шайбы относительно стола: прямая вдоль $\vec{a}_ш$, ведь шайба стартует из покоя с постоянным ускорением. Рисунок в масштабе.

Обратите внимание. Нормальная реакция N не равна $mg\cos\alpha$: клин движется с ускорением, и это меняет давление шайбы.

Проверка. Размерность: $\sqrt{H/g}$ — с. Без силы ($F = 0$): $a = -\frac{12/25}{84/25}g = -\frac{1}{7}g$ — клин отъезжает влево, как и должно быть, когда шайба давит на него. $t_2 \approx 3{,}74\sqrt{H/g} > t_1 \approx 2{,}36\sqrt{H/g}$ — клин «убегает» из-под шайбы. Шайба не отрывается: $N = m(\frac{4}{5} + \frac{19}{42}\cdot\frac{3}{5})g > 0$.

Ответ. 1) $t_1 = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}$; 2) $a = \frac{19}{42}g$; 3) $t_2 = \sqrt{\frac{14H}{g}}$.