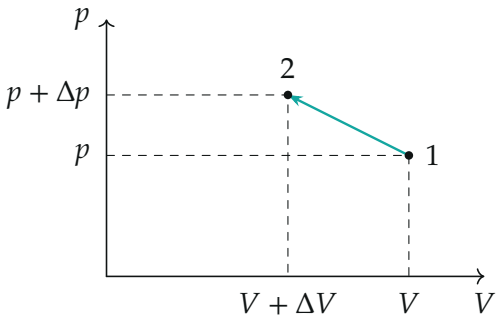
Малые изменения параметров идеального газа

Задача 5. [Физтех 2020/21, 10 класс, варианты 10-01–10-02, задача 5] У идеального одноатомного газа в некотором процессе давление увеличилось на 2%, а объём уменьшился на 1%. В этом процессе относительные изменения давления, объёма и температуры считать намного меньше единицы.

1. Как и на сколько процентов изменилась температура газа?
2. Найти в этом процессе отношение полученной газом теплоты к работе газа.



Поясняющий рисунок: малый участок процесса на диаграмме p, V (масштаб изменений сильно увеличен). Давление растёт, объём уменьшается: $\Delta p > 0$, $\Delta V < 0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на уравнение состояния идеального газа и первый закон термодинамики для малого изменения. Все изменения малы, поэтому произведения малых величин (например, $\Delta p\,\Delta V$) отбрасываем: относительные изменения просто складываются. Работа на малом участке — давление на изменение объёма. Газ сжимают — работа газа отрицательна; температура при этом растёт, внутренняя энергия растёт, и теплота газу всё же *подводится*: отношение Q/A выйдет отрицательным.

Обозначения. ν — количество вещества; $\varepsilon_p = \dfrac{\Delta p}{p} = 0{,}02$, $\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{V} = -0{,}01$, $\varepsilon_T = \dfrac{\Delta T}{T}$ — относительные изменения; Q — полученная газом теплота, A — работа газа, ΔU — изменение внутренней энергии.

Пункт 1.

1. Уравнение Менделеева–Клапейрона в начале и в конце:

$$pV = \nu RT, \qquad (p + \Delta p)(V + \Delta V) = \nu R(T + \Delta T).$$

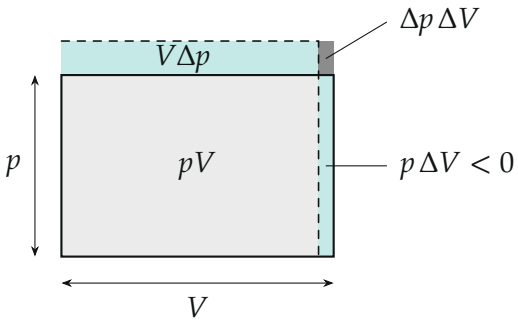
2. Относительные изменения. Раскрываем скобки и вычитаем первое уравнение:

$$V\Delta p + p\Delta V + \Delta p\,\Delta V = \nu R\Delta T.$$

Делим на $pV = \nu RT$; слагаемое $\varepsilon_p\varepsilon_V = -0{,}0002$ на два порядка меньше остальных — отбрасываем:

$$\varepsilon_T \approx \varepsilon_p + \varepsilon_V = 0{,}02 - 0{,}01 = 0{,}01.$$

Температура увеличилась на 1%.



Произведение pV как площадь прямоугольника: при малых изменениях прибавляется полоска $V\Delta p$ и убавляется полоска $|p\Delta V|$; уголок $\Delta p\,\Delta V$ — величина второго порядка малости.

Пункт 2.

3. Работа газа. На малом участке давление почти постоянно, работа газа равна площади под графиком $p(V)$ со знаком:

$$A \approx p\,\Delta V = pV\varepsilon_V = -0{,}01\,pV.$$

4. Изменение внутренней энергии одноатомного газа:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}pV\varepsilon_T = 0{,}015\,pV.$$

5. Первый закон термодинамики: теплота, полученная газом, идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа:

$$Q = \Delta U + A = 0{,}015\,pV - 0{,}010\,pV = 0{,}005\,pV.$$

6. Отношение. В общем виде

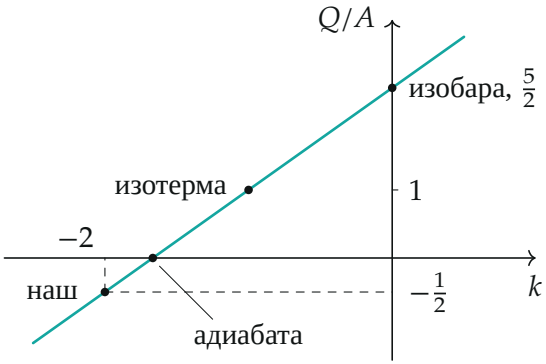
$$\frac{Q}{A} = \frac{\frac{3}{2}(\varepsilon_p + \varepsilon_V) + \varepsilon_V}{\varepsilon_V} = \frac{3}{2}\Big(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_V} + 1\Big) + 1 = \frac{3}{2}(-2+1) + 1 = -\frac{1}{2}.$$

Знак минус: газ получил теплоту ($Q > 0$), а работу совершил отрицательную ($A < 0$, его сжали).



Энергетический баланс в единицах $10^{-3}pV$*:* $Q = \Delta U + A = 15 - 10 = 5$. *Отношение* $Q/A = 5/(-10) = -\frac{1}{2}$.

7. Как ответ зависит от процесса. Отношение определяется только $k = \varepsilon_p/\varepsilon_V$: $\frac{Q}{A} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}k$. Для изобары ($k = 0$) — известное $\frac{5}{2}$, для изотермы ($k = -1$) — 1, для адиабаты ($k = -\frac{5}{3}$) — 0. У нас $k = -2$ — «круче» адиабаты, и знак Q противоположен знаку A.



$Q/A = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}k$, где $k = \frac{\Delta p/p}{\Delta V/V}$. Наш процесс ($k = -2$) левее адиабаты: $Q/A < 0$.

Обратите внимание. Сжатие не обязательно означает отдачу тепла: здесь газ сжимают, а теплоту он получает — температура растёт быстрее, чем дала бы одна работа сжатия.

Проверка. Размерности: ε безразмерны, Q/A — безразмерное. Предельные случаи шага 7: изобара даёт $Q = \frac{5}{2}A$ (как c_p/R), адиабата — $Q = 0$, совпадает с известным. Второй способ для пункта 1: $T \propto pV$, $\ln T = \ln p + \ln V + \text{const}$, дифференциал: $\varepsilon_T = \varepsilon_p + \varepsilon_V$ — то же.

Ответ. 1) температура увеличилась на 1%; 2) $\dfrac{Q}{A} = -\dfrac{1}{2}$.