Камень и модель самолёта на траектории камня

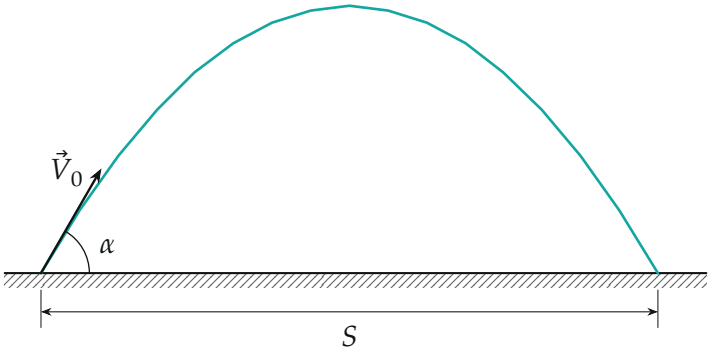
Задача 1. [Физтех 2020/21, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 1] Дальность полёта камня, брошенного под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, равна $S = 17$ м.

1. Найдите начальную скорость V_0 камня.

Через некоторое время по траектории камня летит модель самолёта массой $m = 1$ кг с постоянной по величине скоростью $V = V_0/4$.

2. В высшей точке траектории найдите вертикальную составляющую силы F, с которой воздух действует на модель самолёта.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха в процессе полёта камня считайте пренебрежимо малой. Точки старта и окончания полёта лежат в одной горизонтальной плоскости.



Поясняющий рисунок: траектория камня (парабола по точкам, в масштабе).

▲ **Решение. Что происходит.** Первый пункт — обычная баллистика: камень движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Во втором пункте модель летит по той же кривой, но с другой скоростью. Форма траектории задаёт её кривизну в каждой точке, а нормальное ускорение тела на кривой — это v^2/ρ, где ρ — радиус кривизны. Значит, радиус кривизны в вершине найдём из движения камня (там его нормальное ускорение — это g), а потом применим к модели. Скорость модели постоянна, поэтому её ускорение чисто нормальное; в вершине оно направлено вниз.

Обозначения. Ось x — горизонтально по полёту, ось y — вверх; ρ — радиус кривизны траектории в высшей точке; a_n — нормальное ускорение модели в высшей точке; F_y — вертикальная составляющая силы воздуха (ответ на вопрос 2).

Пункт 1.

1. Закон движения камня в проекциях. Ускорение $\vec{g}$ вниз, поэтому

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

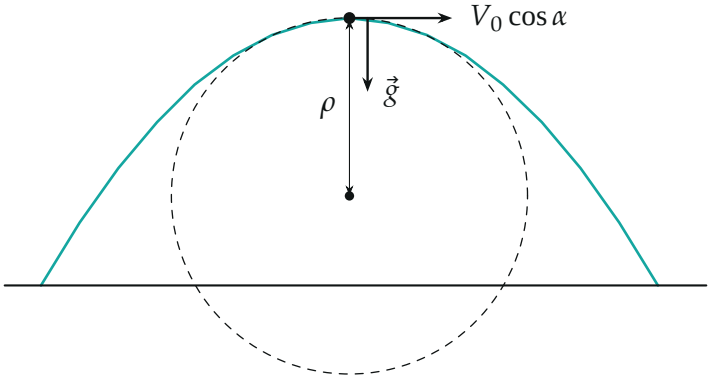
2. Время полёта и дальность. Камень падает при $y = 0$: $t_\text{п} = \dfrac{2V_0 \sin\alpha}{g}$. Дальность

$$S = V_0 \cos\alpha \cdot t_\text{п} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{gS}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 17}{\sqrt{3}/2}} \approx 14 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

3. Радиус кривизны в вершине. В высшей точке скорость камня горизонтальна и равна $V_0 \cos\alpha$, а ускорение $\vec{g}$ направлено вниз — перпендикулярно скорости. Значит, $\vec{g}$ здесь целиком нормальное ускорение:

$$g = \frac{(V_0 \cos\alpha)^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V_0^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{196 \cdot \frac{1}{4}}{10} \approx 4{,}9 \text{ м}.$$



В вершине скорость горизонтальна, ускорение $\vec{g}$ ей перпендикулярно и направлено к центру кривизны. Пунктир — окружность кривизны радиуса ρ (в масштабе): вблизи вершины она совпадает с параболой.

4. Ускорение модели в вершине. Модель движется с постоянной по модулю скоростью $V = V_0/4$ по той же кривой, поэтому её касательное ускорение равно нулю, а нормальное

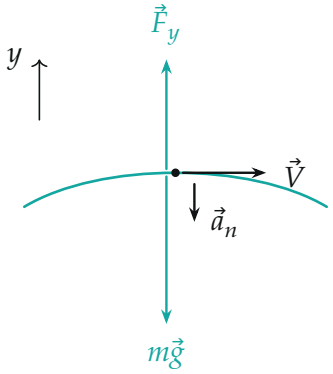
$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V_0^2/16}{V_0^2\cos^2\alpha/g} = \frac{g}{16\cos^2\alpha} = \frac{g}{4} = 2{,}5\ \text{м/с}^2,$$

направлено, как и у камня, к центру кривизны — вертикально вниз.

5. Второй закон Ньютона для модели в проекции на ось y. На модель действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила воздуха $\vec{F}$ (подъёмная сила крыла, тяга винта — всё, что от воздуха). Ускорение a_n вниз, то есть $a_y = -a_n$:

$$F_y - mg = -ma_n \quad \Rightarrow \quad F_y = m(g - a_n) = 1\cdot(10 - 2{,}5) = 7{,}5\ \text{Н}.$$

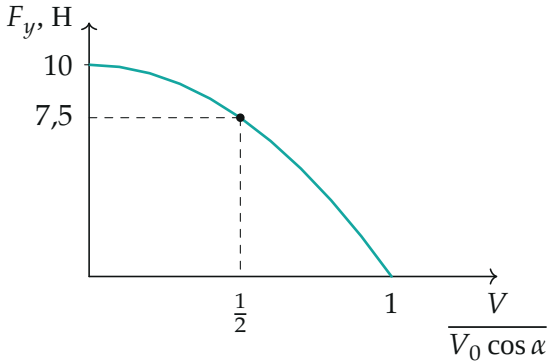
$F_y > 0$ — сила направлена вверх.



Модель в вершине: тяжесть $m\vec{g}$ (10 Н) и вертикальная составляющая силы воздуха $\vec{F}_y$ (7,5 Н) вверх; их разность сообщает нормальное ускорение $\vec{a}_n = \vec{g}/4$ вниз. Длины стрелок — по модулю.

6. Смысл. Модель в вершине вдвое медленнее камня ($V_0/4$ против

$V_0 \cos\alpha = V_0/2$). На той же кривизне её нормальное ускорение в $2^2 = 4$ раза меньше, $g/4$, поэтому воздух должен держать модель силой $\frac{3}{4}mg$.



Вертикальная сила воздуха в вершине от скорости модели, по точкам формулы $F_y = mg(1 - V^2/(V_0\cos\alpha)^2)$. Модель со скоростью камня в вершине ($V = V_0\cos\alpha$) летит «баллистически», $F_y = 0$. У нас $V = V_0/4 = \frac{1}{2}V_0\cos\alpha$, $F_y = 7{,}5$ Н.

Обратите внимание. Скорость модели $V_0/4$ сравниваем не с V_0, а со скоростью камня *в вершине*, $V_0\cos\alpha = V_0/2$: именно она задаёт кривизну.

Проверка. Размерность: $[V_0] = \sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$. Второй способ для ρ: из уравнения параболы $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$ кривизна в вершине $|y''| = \dfrac{g}{V_0^2\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\rho}$ — то же. Предел: при $V = V_0\cos\alpha$ модель повторяет камень, $F_y = 0$ (рисунок выше).

Ответ. 1) $V_0 = \sqrt{\dfrac{gS}{\sin 2\alpha}} \approx 14$ м/с; 2) $F_y = mg\left(1 - \dfrac{1}{16\cos^2\alpha}\right) = 7{,}5$ Н, вверх.