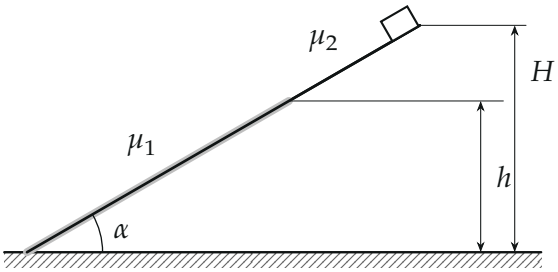
Коробка на наклонной плоскости с двумя коэффициентами трения

Задача 2. [Физтех 2020/21, 10 класс, варианты 10-03–10-04, задача 2] Маленькая коробка съезжает по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Коэффициент трения скольжения коробки по поверхности на высотах меньших $h = 2$ м равен $\mu_1 = 0{,}81$, на больших высотах коэффициент трения скольжения равен $\mu_2 = 0{,}11$. Начальная скорость коробки нулевая. У основания наклонной плоскости коробка останавливается.

1. Найдите продолжительность T движения коробки на участке торможения.
2. С какой высоты H съехала коробка? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

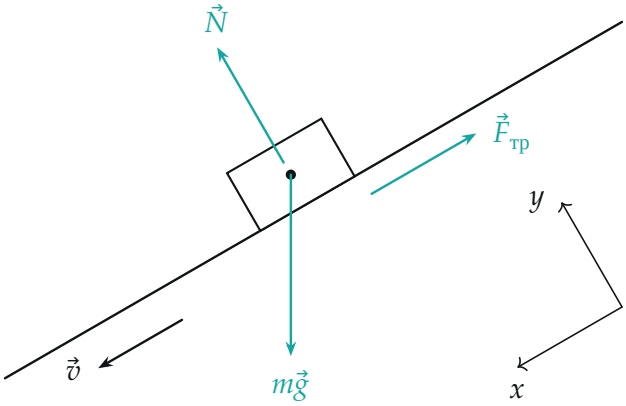


Поясняющий рисунок: ниже высоты h (серая полоса) поверхность шероховатая, μ_1; выше — более гладкая, μ_2. Коробка стартует с высоты H без скорости.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на второй закон Ньютона на наклонной плоскости с трением. Сила трения скольжения всегда направлена против скорости, то есть вверх по склону. Наверху трение слабое: $\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}58$, скатывающая составляющая тяжести больше трения, коробка разгоняется. Внизу трение сильное: $\mu_1 > \operatorname{tg}\alpha$, коробка тормозит — и останавливается ровно у основания. На каждом участке ускорение постоянно.

Обозначения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону вверх; a_2 — ускорение на верхнем участке (разгон), a_1 — модуль

ускорения на нижнем (торможение); v — скорость на границе участков; $L_1 = h/\sin\alpha$ и $L_2 = (H-h)/\sin\alpha$ — длины участков.



Силы на коробку: тяжесть $m\vec{g}$, реакция $\vec{N}$ по нормали к склону, трение скольжения $\vec{F}_{тр}$ вверх по склону (против скорости $\vec{v}$). Ось x — вниз по склону, y — по нормали.

1. Второй закон Ньютона для коробки в проекциях. На ось y ускорения нет: $N - mg\cos\alpha = 0$, $N = mg\cos\alpha$. Трение скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. На ось x:

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \qquad a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Пункт 1.

2. Ускорение на нижнем участке. При $\mu_1 = 0{,}81$: $a_x = 10\,(0{,}5 - 0{,}81\cdot 0{,}866) \approx -2{,}0$ м/с^2 — минус, коробка тормозит. Модуль

$$a_1 = g(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha) \approx 2{,}0 \text{ м/с}^2.$$

3. Время торможения. Равнозамедленное движение до остановки удобно пройти «назад во времени»: обратное движение — разгон из покоя с ускорением a_1 на длине L_1:

$$L_1 = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a_1 T^2}{2} \quad\Rightarrow\quad T = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha\,(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{2{,}0}} \approx 2\text{ с}.$$

Пункт 2.

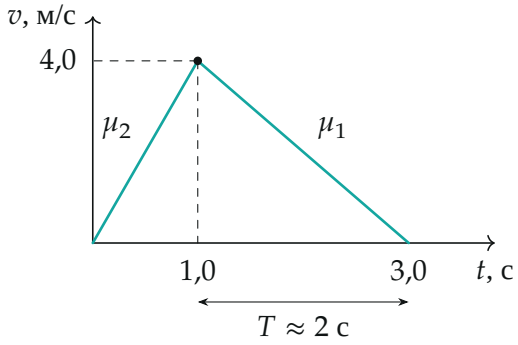
4. Скорость на границе. Из шага 3 (формула без времени для торможения до нуля): $v^2 = 2a_1L_1$. Та же скорость набрана на верхнем участке разгоном из покоя: $v^2 = 2a_2L_2$, где $a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \approx 4{,}05$ м/с^2. Приравниваем:

$$2g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\frac{H-h}{\sin\alpha} = 2g(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}.$$

5. Высота. Делим на $2g\cos\alpha/\sin\alpha$:

$$(\operatorname{tg}\alpha - \mu_2)(H-h) = (\mu_1 - \operatorname{tg}\alpha)h,$$

$$H = \frac{\mu_1-\mu_2}{\operatorname{tg}\alpha-\mu_2}h = \frac{0{,}81-0{,}11}{0{,}577-0{,}11}\cdot 2 \approx 3 \text{ м}.$$

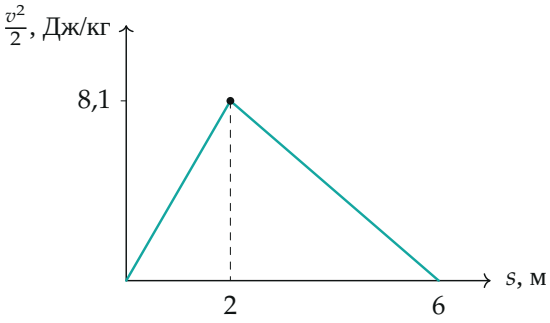


Скорость коробки (по точкам: $a_2 = 4{,}05$, $a_1 = 2{,}01$ м/с^2). Площади под двумя отрезками — длины участков: 2 м сверху и 4 м снизу. Разгон вдвое быстрее торможения — и вдвое короче.

6. Второй способ — энергия. Изменение кинетической энергии от старта до остановки равно нулю, значит, работа тяжести mgH равна работе трения на обоих участках:

$$mgH = \mu_2 mg\cos\alpha\,\frac{H-h}{\sin\alpha} + \mu_1 mg\cos\alpha\,\frac{h}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad H\operatorname{tg}\alpha = \mu_2(H-h)+\mu_1 h,$$

откуда то же $H = \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\operatorname{tg}\alpha - \mu_2}\,h$.



Кинетическая энергия единицы массы вдоль пути s по склону: на каждом участке она меняется линейно (наклон — a_2 и $-a_1$), путь $2\text{ м} + 4\text{ м} = L_2 + L_1$.

Обратите внимание. Коробка вообще может съехать наверху, только если $\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha$, и затормозить внизу, только если $\mu_1 > \operatorname{tg}\alpha$: здесь $0{,}11 < 0{,}58 < 0{,}81$ — оба условия выполнены.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$; H — в метрах, как h. Предел $\mu_2 \to 0$: $H = \frac{\mu_1}{\operatorname{tg}\alpha}h$ — трения сверху нет, вся энергия гасится внизу. Предел $\mu_1 = \operatorname{tg}\alpha$: $H = h$ — внизу коробка не тормозит, значит, разгоняться ей нельзя.

Ответ. 1) $T = \sqrt{\dfrac{2h}{g\sin\alpha(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha)}} \approx 2$ с; 2) $H = \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\operatorname{tg}\alpha - \mu_2}\,h \approx 3$ м.