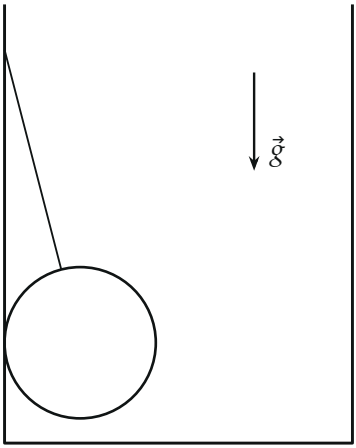
Шар на нити в воде во вращающемся сосуде

Задача 3. [Физтех 2020/21, 10 класс, задача 3] Однородный шар радиуса $R = 5$ см подвешен на нерастяжимой нити длиной $l = 15$ см к гладкой вертикальной стенке сосуда (см. рис.). Масса шара $m = 0{,}8$ кг.



1. С какой по величине N силой шар действует на стенку сосуда?

Сосуд заполняют водой и приводят во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через точку крепления нити к стенке. Угловая скорость вращения $\omega = 10$ рад/с, шар находится полностью в воде вдали от стенок.

2. Какой угол α нить образует с вертикалью?

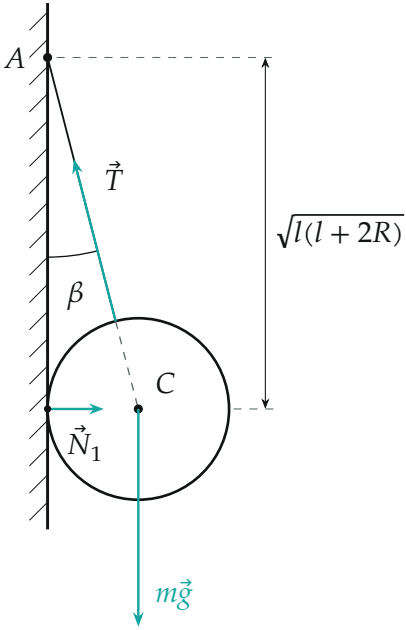
Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** В первой части шар покоится: это задача на равновесие тела под действием трёх сил — тяжести, натяжения нити и реакции гладкой стенки. Стенка гладкая, поэтому её сила перпендикулярна стенке и проходит через центр шара; натяжение тоже проходит через центр (нить продолжает радиус шара). Три силы, сходящиеся в одной точке, замыкаются в треугольник, и сила давления на стенку находится из геометрии нити. Во второй части шар вместе с водой вращается по окружности: это конический маятник, но в жидкости. Кроме тяжести

и натяжения на шар действует сила Архимеда, и у неё во вращающейся воде есть не только вертикальная, но и горизонтальная составляющая — та самая, что держит на окружности вытесненную шаром воду. Масса шара и его объём из ответа выпадут.

Обозначения. β — угол нити с вертикальной стенкой в первой части; T — сила натяжения нити; V — объём шара; ρ_0 — плотность воды; r — радиус окружности, по которой движется центр шара; C — центр шара, A — точка крепления нити.

Пункт 1.



Силы, действующие на шар в первой части. Все три линии действия проходят через центр C. Сила реакции стенки $\vec{N}_1$ приложена в точке касания и направлена по радиусу.

1. Геометрия. Нить, натянутая шаром, лежит на продолжении радиуса: иначе натяжение создавало бы момент относительно центра, а других сил с моментом нет (реакция гладкой стенки и тяжесть проходят через центр). Поэтому от точки A до центра расстояние $AC = l + R$, а

центр отстоит от стенки на R (шар касается стенки). Из прямоугольного треугольника с гипотенузой AC:

$$\sin\beta = \frac{R}{l+R} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{R}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}} = \frac{R}{\sqrt{l(l+2R)}}.$$

2. Условие равновесия шара. Шар покоится, значит, по второму закону Ньютона сумма сил равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_1 = 0.$$

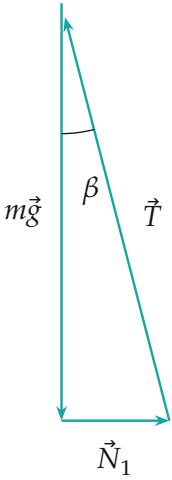
Проецируем на горизонталь (от стенки) и на вертикаль (вверх) — так в каждое уравнение войдёт одна из сил N_1 и mg:

$$N_1 - T\sin\beta = 0, \qquad T\cos\beta - mg = 0.$$

Делим первое на второе — неизвестное T уходит:

$$N_1 = mg\operatorname{tg}\beta = mg\,\frac{R}{\sqrt{l(l+2R)}}.$$

Тот же результат даёт треугольник сил: три силы с нулевой суммой, приложенные одна за другой, замыкаются, и катеты mg и N_1 относятся как $1 : \operatorname{tg}\beta$.



Треугольник сил: сумма трёх сил равна нулю, поэтому векторы, отложенные один за другим, замыкаются. Угол между $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ равен β.

3. Числа и сила, действующая на стенку. По третьему закону Ньютона шар давит на стенку с силой той же величины, $N = N_1$:

$$N = 0{,}8 \cdot 10 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}25}}\ \text{Н} \approx 2{,}1\ \text{Н}.$$

Пункт 2.

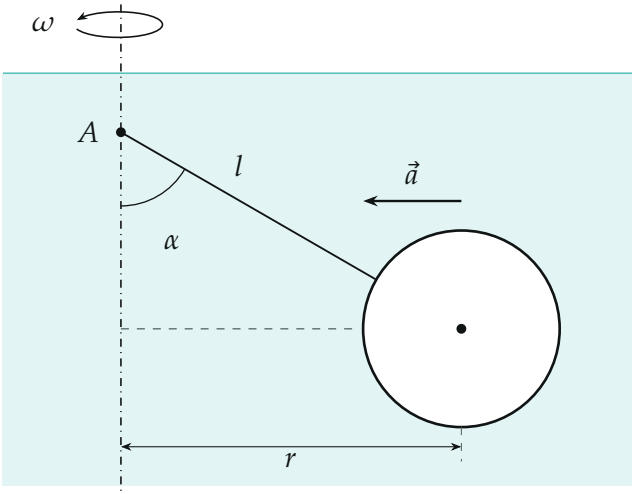
4. Качественная картина. После раскрутки вода вращается как целое вместе с сосудом, и шар, увлекаемый водой, движется по горизонтальной окружности радиуса $r = (l+R)\sin\alpha$ с центром на оси вращения. Его ускорение $a = \omega^2 r$ направлено горизонтально к оси. Это ускорение должна создать сумма сил. Вертикально шар не движется, поэтому вертикальные проекции сил уравновешены.

5. Сила Архимеда во вращающейся воде. Сила Архимеда — равнодействующая сил давления воды на поверхность шара. Она не зависит от того, что внутри поверхности. Мысленно заменим шар водой того же объёма: такая «водяная капля» массой $\rho_0 V$ двигалась бы вместе с остальной водой по той же окружности, и на неё действовали бы только тяжесть и те же силы давления. Значит, по второму закону Ньютона

для этой капли

$$\vec{F}_\text{A} + \rho_0 V\vec{g} = \rho_0 V\vec{a}, \qquad \vec{F}_\text{A} = \rho_0 V(\vec{a} - \vec{g}).$$

Вертикальная составляющая $\rho_0 Vg$ направлена вверх, как в покоящейся воде, а горизонтальная $\rho_0 V\omega^2 r$ — к оси.



Вторая часть: шар в воде движется по окружности радиуса $r = (l + R)\sin\alpha$ вокруг оси, проходящей через точку крепления A. Ускорение $\vec{a}$ направлено к оси.

6. Второй закон Ньютона для шара. Сумма трёх сил создаёт центростремительное ускорение:

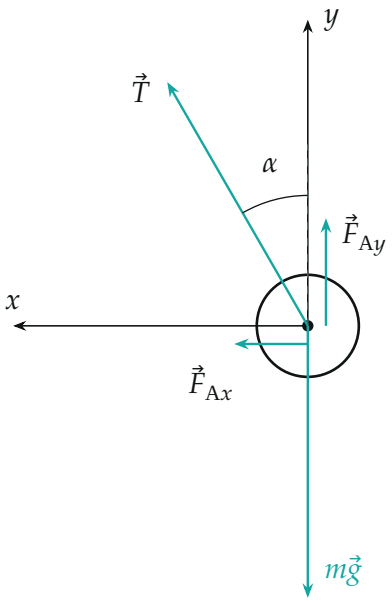
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_\text{A}.$$

Ось x направим горизонтально к оси вращения (по ускорению), ось y — вертикально вверх: тогда ускорение имеет только одну проекцию.

$$x: \quad m\omega^2 r = T\sin\alpha + \rho_0 V\omega^2 r, \qquad y: \quad 0 = T\cos\alpha + \rho_0 Vg - mg.$$

Перенесём силу Архимеда влево:

$$(m - \rho_0 V)\,\omega^2 r = T\sin\alpha, \qquad (m - \rho_0 V)\,g = T\cos\alpha.$$



Тело m: силы во второй части и оси. Сила Архимеда разложена на вертикальную $\rho_0 V g$ и горизонтальную $\rho_0 V \omega^2 r$ составляющие.

7. Угол. Делим первое уравнение на второе — уходят и T, и неизвестная разность $m - \rho_0 V$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2 (l+R)\sin\alpha}{g},$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2(l+R)} = \frac{10}{10^2 \cdot 0{,}2} = 0{,}5, \qquad \alpha = 60^\circ.$$

Сокращение на $\sin\alpha$ законно: решение $\alpha = 0$ (нить вертикальна, шар на оси) возможно только при $\omega^2(l+R) \le g$; здесь $\omega^2(l+R) = 20$ м/с$^2 > g$, и вертикальное положение неустойчиво.

Обратите внимание. Нельзя оставить силу Архимеда только вертикальной: тогда $\operatorname{tg}\alpha = m\omega^2 r/((m-\rho_0 V)g)$, и ответ зависел бы от плотности шара, которой нет в условии. Горизонтальная часть силы давления воды $\rho_0 V \omega^2 r$ и есть то, что отличает вращающуюся воду от покоящей-

ся.

Второй способ увидеть ответ: в системе отсчёта, вращающейся вместе с водой, шар покоится, а на него действуют «эффективная тяжесть» $m(\vec{g}-\vec{a})$ и выталкивающая сила $-\rho_0 V(\vec{g}-\vec{a})$, направленные по одной прямой. Нить тянется вдоль $\vec{g}-\vec{a}$, то есть вдоль вектора с горизонтальной составляющей $\omega^2 r$ и вертикальной g — так же, как у обычного конического маятника в воздухе: $\operatorname{tg}\alpha = \omega^2 r/g$. Вода лишь уменьшает натяжение в $\dfrac{m}{m-\rho_0 V}$ раз, но не меняет угол.

Проверка. Размерность: $g/(\omega^2(l+R))$ — $\dfrac{\text{м/с}^2}{\text{с}^{-2}\cdot\text{м}}$, безразмерно. Предел: при $\omega\to\infty$ $\cos\alpha\to 0$, нить ложится горизонтально. Шар действительно тонет, нить натянута: плотность шара $m/V = 0{,}8/(5{,}2\cdot 10^{-4}) \approx 1{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3 больше плотности воды, $m-\rho_0 V > 0$, и $T = (m-\rho_0 V)g/\cos\alpha \approx 5{,}5$ Н. Центр шара — на расстоянии $r = 0{,}2\sin 60^\circ \approx 0{,}17$ м от оси, так что шар полностью в воде вдали от стенок только при достаточно широком сосуде, как и сказано.

Смысл: в покоящейся и во вращающейся воде нить направлена вдоль «эффективной тяжести»; угол конического маятника одинаков в воздухе и в воде.

Ответ. 1) $N = mg\dfrac{R}{\sqrt{l(l+2R)}} \approx 2{,}1$ Н; 2) $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2(l+R)} = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$.