Нагрев воды под поршнем до пара

Задача 4. [Физтех 2020/21, 10 класс, задача 4] В теплоизолированном цилиндре с гладкими стенками под лёгким поршнем находится вода массой $m = 5{,}5$ г при температуре $t_0 = 0\,^\circ$C. Площадь поршня $S = 500$ см^2, наружное давление $P_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. К содержимому цилиндра медленно подводят теплоту, вода начинает кипеть.

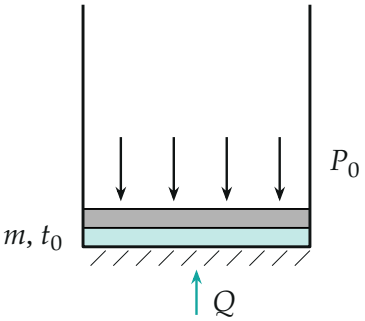
1. Какое количество теплоты Q_1 подвели к воде до начала кипения?

После начала кипения к содержимому цилиндра подвели $Q_2 = 17430$ Дж теплоты.

2. Найдите перемещение H поршня в процессе подведения теплоты.

Удельная теплоёмкость воды $c = 4180$ Дж/(кг·К). Удельная теплота парообразования воды при $100\,^\circ$C $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Удельная теплоёмкость водяного пара при постоянном давлении $P_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па равна $c_P = 2200$ Дж/(кг·К). Водяной пар считайте идеальным газом.

Рисунка в условии нет. Поясняющий рисунок:



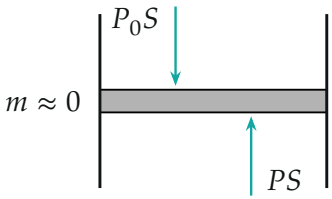
Вода под лёгким поршнем; снаружи давление P_0, снизу медленно подводят теплоту Q.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на фазовый переход при постоянном давлении. Поршень лёгкий и скользит без трения, поэтому давление под ним всё время равно наружному P_0. Процесс идёт в три этапа: вода нагревается до температуры кипения (при $P_0 = 10^5$ Па это $100\,^\circ$C), затем выкипает при этой температуре, и, если теплоты хватает, получившийся пар нагревается дальше при постоянном давлении. Поршень

поднимается только на втором и третьем этапах — объём жидкой воды ничтожен. Главная идея: перемещение поршня определяется конечным объёмом пара, а его даёт уравнение Менделеева — Клапейрона.

Обозначения. $T_к = 373$ К — температура кипения; $\mu = 0{,}018$ кг/моль — молярная масса воды; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); h_1 — подъём поршня за время кипения; h_2 — за время нагрева пара; ΔT — нагрев пара.

1. Давление под поршнем. Второй закон Ньютона для лёгкого поршня (масса ноль) в проекции на вертикаль: сила давления снизу равна силе давления снаружи, $PS = P_0S$. Значит, на всех этапах $P = P_0$, вода кипит при 100 °C, а пар нагревается изобарно — именно поэтому в условии дана c_P.



Силы, действующие на лёгкий поршень. Масса поршня пренебрежимо мала, поэтому $P = P_0$.

Пункт 1.

2. Нагрев воды до кипения. Поршень не движется (объём воды почти не меняется), работа равна нулю, и вся теплота идёт на нагрев воды от $t_0 = 0$ °C до 100 °C:

$$Q_1 = mc\,(100\,^\circ\text{C} - t_0) = 5{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 4180 \cdot 100 \text{ Дж} \approx 2300 \text{ Дж}.$$

Пункт 2.

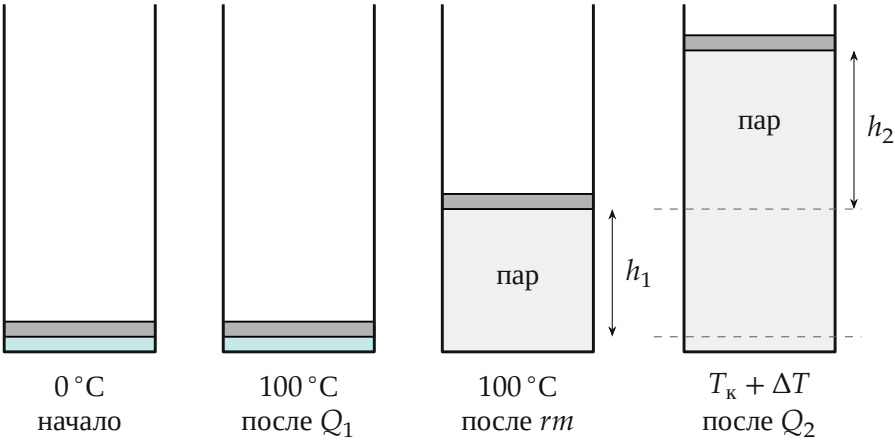
3. Хватит ли теплоты, чтобы выкипела вся вода? На испарение всей воды при 100 °C нужно

$$Q_{\text{исп}} = rm = 2{,}26 \cdot 10^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 12430 \text{ Дж} < Q_2.$$

Значит, вода выкипает целиком, и остаток

$$q = Q_2 - rm = 17430 - 12430 = 5000 \text{ Дж}$$

идёт на изобарный нагрев пара. Теплота парообразования r дана при постоянном давлении: в неё уже входит работа пара по подъёму поршня, отдельно её учитывать не надо.



Этапы процесса в масштабе: вода нагревается при неподвижном поршне, выкипает при 100 °C (поршень поднимается на h_1), пар нагревается при постоянном давлении (ещё h_2).

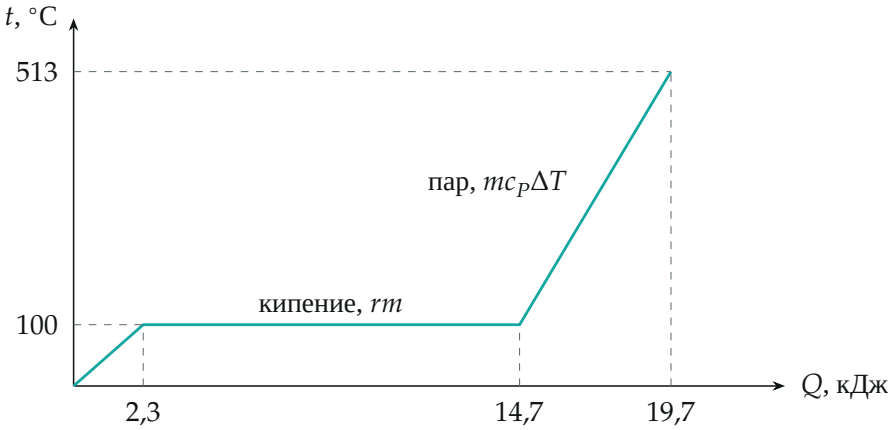
4. Подъём поршня за время кипения. Когда вода выкипела целиком, весь пар массой m при температуре $T_к$ и давлении P_0 занимает объём Sh_1 (объёмом воды 5,5 см^3 пренебрегаем: это 0,1 мм высоты). Уравнение Менделеева — Клапейрона для пара:

$$P_0 S h_1 = \frac{m}{\mu} R T_к \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{mRT_к}{\mu P_0 S} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 373}{0{,}018 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05}\ \text{м} \approx 0{,}19\ \text{м}.$$

5. Нагрев пара при постоянном давлении. Теплота на изобарный нагрев пара $q = mc_P \Delta T$, откуда $\Delta T = \dfrac{q}{mc_P} = \dfrac{5000}{5{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2200}\ \text{К} \approx 413\ \text{К}$. При постоянном давлении уравнение состояния для начала и конца нагрева пара даёт $P_0 S h_2 = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ — объём растёт пропорционально температуре:

$$h_2 = \frac{mR\Delta T}{\mu P_0 S} = \frac{R}{\mu c_P} \cdot \frac{q}{P_0 S} = \frac{8{,}31}{0{,}018 \cdot 2200} \cdot \frac{5000}{10^5 \cdot 0{,}05}\ \text{м} \approx 0{,}21\ \text{м}.$$

Знак: пар расширяется и поднимает поршень дальше.



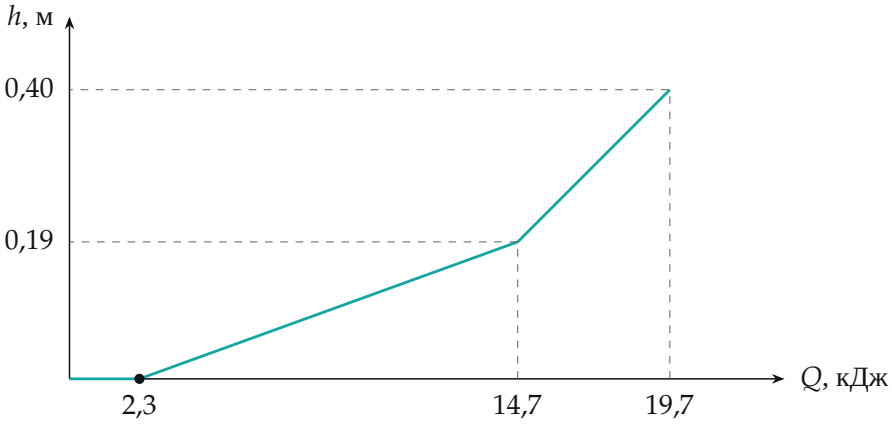
Температура содержимого в зависимости от подведённой теплоты. Горизонтальная площадка — кипение: теплота идёт на парообразование, температура не меняется.

6. Перемещение поршня.

$$H = h_1 + h_2 \approx 0{,}19 + 0{,}21 = 0{,}40 \text{ м}.$$

Второй способ — сразу по конечному состоянию: в конце весь пар массой m при давлении P_0 и температуре $T_к + \Delta T \approx 786$ К занимает объём SH:

$$H = \frac{mR(T_к + \Delta T)}{\mu P_0 S} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 786}{0{,}018 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05} \text{ м} \approx 0{,}40 \text{ м}.$$



Высота поршня над начальным положением. При кипении она растёт пропорционально выкипевшей массе, при нагреве пара — пропорционально температуре; наклоны разные.

Обратите внимание. Ловушка — решить, что часть Q_2 останется на испарение, а пар не нагреется. Сравнение Q_2 с rm (шаг 3) обязательно: если бы $Q_2 < rm$, вода выкипела бы не вся, и поршень поднялся бы на $h_1 \cdot Q_2/(rm)$.

Проверка. Размерность $\dfrac{mRT}{\mu P_0 S}$: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{Дж/(моль·К)} \cdot \text{К}}{\text{кг/моль} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^2} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}$. Энергетический баланс нагрева пара: работа пара $P_0 S h_2 \approx 1050$ Дж, на внутреннюю энергию ушло $5000 - 1050 = 3950$ Дж, то есть $c_V/c_P = 0{,}79$ — разумно для многоатомного пара ($c_V/c_P = 3/4$ у идеального газа из жёстких трёхатомных молекул). Смысл: поршень «измеряет» объём пара, а объём при постоянном давлении пропорционален количеству пара и его температуре.

Ответ. 1) $Q_1 = mc\,(100\,^\circ\text{C} - t_0) \approx 2300$ Дж; 2) $H = h_1 + h_2 \approx 0{,}4$ м.