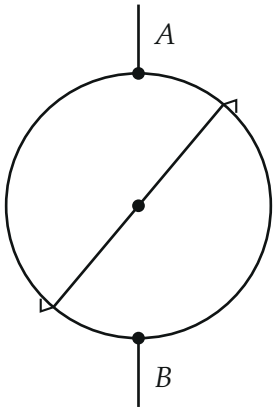
Проволочное кольцо с вращающейся перемычкой

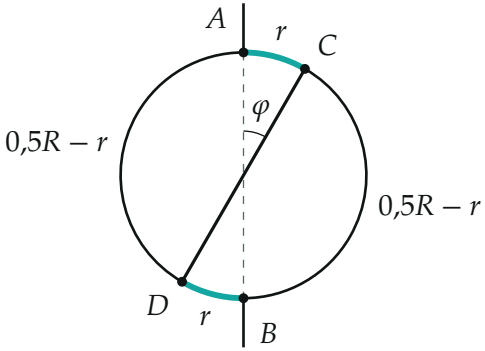
Задача 5. [Физтех 2020/21, 10 класс, задача 5] Кольцо (см. рис.) свернуто из куска проволоки сопротивлением $R = 24$ Ом. В точках A и B, лежащих на концах диаметра, на кольцо подано напряжение $U = 6$ В. По кольцу, вращаясь вокруг центра, может скользить диаметральная перемычка, сопротивление которой пренебрежимо мало.



1. Какая мощность P будет рассеиваться на кольце, если перемычка составляет с диаметром AB угол $\alpha = 30°$?
2. Перемычку вращают. В каком отношении $n > 1$ перемычка делит каждое полукольцо при токе через перемычку $I = \dfrac{2}{3}$ А?
3. Какая мощность P_2 рассеивается на кольце в этом случае?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт цепи постоянного тока с перемычкой нулевого сопротивления. Перемычка соединяет две точки кольца, C и D, и делает их одним узлом. Кольцо распадается на четыре дуги, а цепь — на два последовательных участка «A — узел CD» и «узел CD — B», в каждом по две параллельные дуги. Сопротивление дуги пропорционально её угловой длине. Из-за симметрии (дуги в обоих участках одинаковы) на каждом участке ровно половина напряжения $U/2$ — это главная идея, она даёт и мощность, и ток через перемычку.

Обозначения. C и D — концы перемычки (C ближе к A справа, D — к B слева); φ — угол между перемычкой и диаметром AB; r — сопротивление короткой дуги AC (и равной ей BD); $0{,}5R - r$ — сопротивление длинной дуги CB (и равной ей DA); $R_э$ — сопротивление всей цепи.

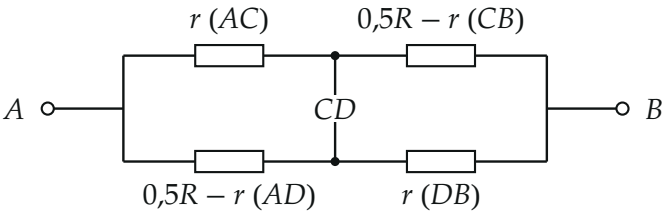


Перемычка CD под углом φ к диаметру AB. Короткие дуги AC и BD (выделены) имеют сопротивление r, длинные CB и DA — $0{,}5R - r$.

1. Сопротивления дуг. Проволока однородная, поэтому сопротивление дуги пропорционально её углу. Дуга AC стягивает центральный угол φ — столько же, сколько угол между перемычкой и диаметром (оба угла отсчитываются от центра кольца). Вся окружность (360°) имеет сопротивление R:

$$r = R\,\frac{\varphi}{360^\circ}, \qquad R_{CB} = R_{DA} = \frac{R}{2} - r.$$

2. Эквивалентная схема. Точки C и D соединены проводником без сопротивления, их потенциалы равны — это один узел. От A к этому узлу ведут две дуги: AC (r) и AD ($0{,}5R - r$); от узла к B — дуги CB ($0{,}5R - r$) и DB (r).



Эквивалентная схема (как у организаторов). Средний вертикальный провод — перемычка CD: верхний его конец — точка C, нижний — D.

Сопротивление каждого участка из двух параллельных дуг одинаково:

$$R_1 = \frac{r\,(0{,}5R - r)}{r + (0{,}5R - r)} = \frac{r\,(0{,}5R - r)}{0{,}5R}, \qquad R_э = 2R_1 = \frac{4r\,(0{,}5R - r)}{R}.$$

Участки соединены последовательно и одинаковы, поэтому напряжение на каждом $U/2$.

Пункт 1.

3. Мощность при $\varphi = 30°$. Здесь $r = R \cdot \frac{30°}{360°} = \frac{R}{12} = 2$ Ом, а $0{,}5R - r = \frac{5R}{12} = 10$ Ом:

$$R_э = \frac{4 \cdot \frac{R}{12} \cdot \frac{5R}{12}}{R} = \frac{5}{36}R = \frac{10}{3}\ \text{Ом},$$

$$P = \frac{U^2}{R_э} = \frac{36}{5}\frac{U^2}{R} = \frac{36 \cdot 36}{5 \cdot 24}\ \text{Вт} = 10{,}8\ \text{Вт}.$$

Вся мощность выделяется в кольце: перемычка без сопротивления тепла не выделяет.

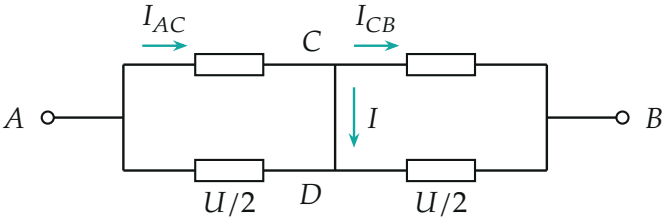
Пункт 2.

4. Ток через перемычку. Запишем первое правило Кирхгофа (закон сохранения заряда) для узла C: ток, пришедший по дуге AC, уходит по дуге CB и по перемычке. Напряжение на каждой дуге — $U/2$, поэтому по закону Ома

$$I_{AC} = \frac{U}{2r}, \qquad I_{CB} = \frac{U}{2(0{,}5R - r)},$$

$$I = I_{AC} - I_{CB} = \frac{U}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{0{,}5R - r}\right).$$

Знак: при $r < R/4$ (то есть $\varphi < 90°$) ток течёт по перемычке от C к D. При $\varphi = 90°$ перемычка перпендикулярна AB, схема — уравновешенный мост, и тока нет.



Токи в узле C: по короткой дуге AC приходит больше, чем может уйти по длинной CB, излишек I идёт через перемычку к D.

5. Уравнение для r**.** Подставим $I = \frac{2}{3}$ А, $U = 6$ В, $0{,}5R = 12$ Ом:

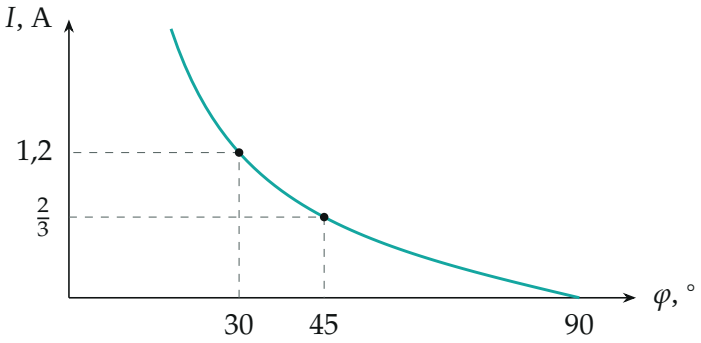
$$\frac{2}{3} = 3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{12-r}\right) \Rightarrow 2r\,(12-r) = 9\,(12-2r) \Rightarrow r^2 - 21r + 54 = 0,$$

$$r = \frac{21 \pm \sqrt{441-216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2}: \qquad r = 3 \text{ Ом} \quad \text{или} \quad r = 18 \text{ Ом}.$$

Второй корень не годится: дуга полукольца не больше $0{,}5R = 12$ Ом. Значит, $r = 3$ Ом $= R/8$, перемычка повёрнута на $\varphi = 45°$, и полукольцо ACB делится в отношении

$$n = \frac{0{,}5R - r}{r} = \frac{12-3}{3} = 3.$$

Если перемычку повернуть за 90°, ток $\frac{2}{3}$ А пойдёт в обратную сторону при $r = 9$ Ом — и отношение дуг снова 9 : 3, то есть ответ $n = 3$ не зависит от направления тока.



Ток через перемычку в зависимости от угла поворота φ (по формуле шага 4). Ток $\frac{2}{3}$ А — при $\varphi = 45°$; при $\varphi = 90°$ мост уравновешен.

Пункт 3.

6. Мощность при $n = 3$. Подставим $r = 3$ Ом, $0{,}5R - r = 9$ Ом в формулу шага 2:

$$R_э = \frac{4 \cdot 3 \cdot 9}{24}\ \text{Ом} = 4{,}5\ \text{Ом} = \frac{3}{16}R, \qquad P_2 = \frac{U^2}{R_э} = \frac{36}{4{,}5}\ \text{Вт} = 8\ \text{Вт}.$$

Второй способ — сложить мощности дуг, на каждой из которых напряжение $U/2 = 3$ В: $P_2 = 2\left(\frac{3^2}{3} + \frac{3^2}{9}\right)$ Вт $= 2\,(3 + 1)$ Вт $= 8$ Вт.

Обратите внимание. Ток через перемычку — не ток во всей цепи и не ток одной дуги, а их *разность* в узле C; полный ток цепи $U/R_э$ в ответ не входит.

Проверка. Предел: при $\varphi \to 90°$ ($r = R/4$) $R_э = R/4$ — как у двух полуколец параллельно, перемычка не нужна, и $I = 0$. При $\varphi \to 0$ ($r \to 0$) перемычка замыкает A на B, $R_э \to 0$. Размерность: $\frac{U}{r}$ — ток. Мощность при $\varphi = 30°$ (10,8 Вт) больше, чем при 45° (8 Вт): чем ближе перемычка к AB, тем меньше сопротивление цепи. Смысл: перемычка нулевого сопротивления просто склеивает две точки кольца, и вся задача сводится к двум одинаковым параллельным парам.

Ответ. 1) $P = \frac{36}{5}\frac{U^2}{R} = 10{,}8$ Вт; 2) $n = 3$; 3) $P_2 = \frac{16}{3}\frac{U^2}{R} = 8$ Вт.