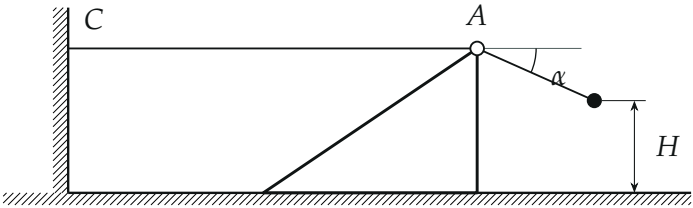
Клин с блоком и шар на нити, привязанной к стене

Задача 1. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 1] Клин находится на горизонтальной поверхности стола. Лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через укреплённый на клине лёгкий блок, привязана к небольшому по размерам шару и стене (см. рис.). Систему удерживают в покое, отведя шар в сторону так, что нить составляет угол α ($\cos\alpha = 3/5$) с горизонтом, участок нити CA горизонтален, шар находится на расстоянии H от стола. Затем систему отпускают, она движется, при этом угол α наклона нити к горизонту не изменяется.



1. Под каким углом к горизонту направлено ускорение шара? Найти значение любой тригонометрической функции этого угла.
2. Найти ускорение клина. Ответ выразить через ускорение свободного падения g.
3. Найти отношение массы шара к массе клина.
4. Через какое время шар достигнет стола?

Трением в системе пренебречь. Все точки системы перемещаются в вертикальной плоскости. Клин не переворачивается. Шар достигает стола раньше, чем клин доезжает до стены.

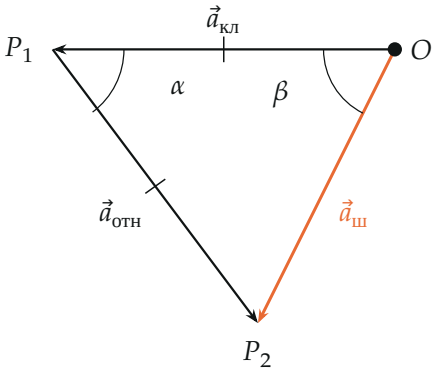
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на связанные тела: нить нерастяжима и скользит по лёгкому блоку без трения, поэтому по всей длине её натяжение одно и то же (T), а сумма длин участков CA и AB не меняется. Клин едет к стене, участок CA укорачивается, и ровно на столько же удлиняется участок AB: шар скользит по прямой вдоль нити *относительно клина*. Угол α при этом постоянен, поэтому ускорение шара в

системе стола складывается из ускорения клина и ускорения вдоль нити. Силы на шар — тяжесть и натяжение, которое направлено вдоль нити. Поэтому второй закон Ньютона для шара в проекции на перпендикуляр к нити не содержит T и сразу даёт ускорение клина. Натяжение найдём из горизонтальных проекций для шара и для клина.

Обозначения. M — масса шара, m — масса клина (как в ответе организаторов), a — модуль ускорения клина, T — натяжение нити, β — угол между ускорением шара и горизонтом. Ось x направим горизонтально вправо (от стены), ось y — вверх. Клин едет влево, его ускорение $-a$ по оси x.

Пункт 1.

1. Кинематическая связь. Пусть клин сместился к стене на s. Тогда CA стал короче на s, значит, AB длиннее на s: шар сместился относительно клина на s вдоль нити от блока. Это верно в любой момент, поэтому и ускорение шара относительно клина по модулю равно a и направлено вдоль нити от A к шару.



Сложение ускорений: $\vec{a}_{ш} = \vec{a}_{кл} + \vec{a}_{отн}$. Треугольник равнобедренный: две стороны равны a (чёрточки).

2. Угол. В равнобедренном треугольнике угол между равными сторонами (в вершине P_1) равен α, а каждый из углов при основании —

$\beta = (180° - \alpha)/2 = 90° - \alpha/2$. Так как $\cos\alpha = 3/5$,

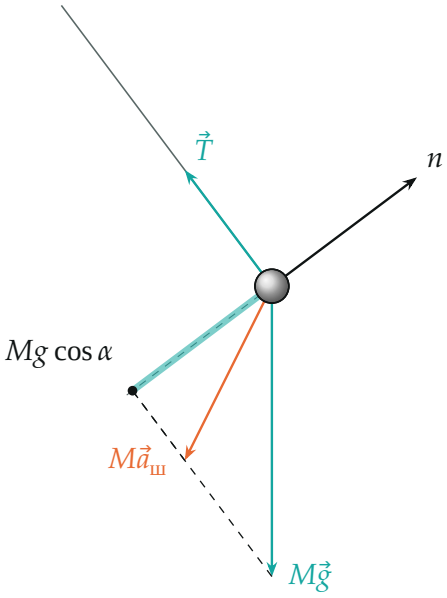
$$\sin\beta = \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = 2.$$

Второй способ, по проекциям: ускорение шара имеет горизонтальную составляющую $a(1-\cos\alpha) = 0{,}4a$ (влево) и вертикальную $a\sin\alpha = 0{,}8a$ (вниз), откуда $\operatorname{tg}\beta = 0{,}8/0{,}4 = 2$. Ускорение направлено вниз и влево, $\beta \approx 63{,}4°$.

Пункт 2.

3. Силы на шар. На шар действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}$ вдоль нити к блоку. Выберем ось n перпендикулярно нити (вверх и вправо), чтобы $\vec{T}$ в неё не проецировалась.



Силы на шар и проекции на ось n: у $\vec{T}$ проекции нет, проекции $M\vec{g}$ и $M\vec{a}_{ш}$ совпадают (бирюзовый отрезок).

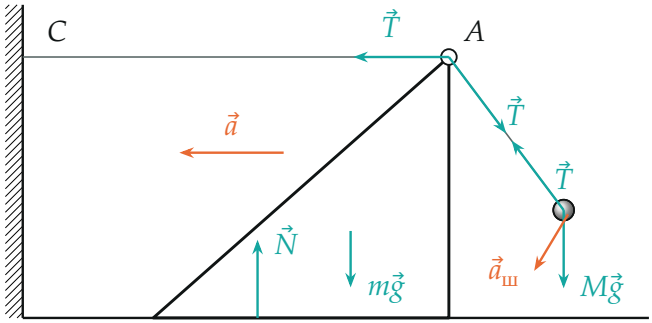
4. Второй закон Ньютона для шара в проекции на ось n. Проекция ускорения клина $-a$ (по оси x) на $n = (\sin\alpha, \cos\alpha)$ равна $-a\sin\alpha$, а ускорение вдоль нити, перпендикулярной n, проекции не даёт. Проекция силы тяжести $-Mg\cos\alpha$, проекция $\vec{T}$ равна нулю:

$$-Ma\sin\alpha = -Mg\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{g\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}g.$$

Знак: проекции обеих сторон отрицательны — они направлены против оси n, то есть вниз и влево, как и должно быть при движении шара вниз.

Пункт 3.

5. Горизонтальные проекции. Теперь нужна сила T. Клин с лёгким блоком — одно тело массой m. Нить действует на блок двумя участками, каждый с силой T: участок CA тянет блок влево, участок AB тянет его вдоль нити вниз и вправо. Вертикальные силы (тяжесть клина и сила реакции стола) в горизонтальные уравнения не входят: трения нет.



Силы на блок с клином, на шар и ускорения. Бирюзовые стрелки — силы, морковные — ускорения.

Для шара ускорение имеет горизонтальную составляющую $a(1-\cos\alpha)$, направленную влево, а нить тянет его влево с силой $T\cos\alpha$:

$$Ma\,(1-\cos\alpha) = T\cos\alpha.$$

Для клина с блоком: нить тянет влево с силой T (участок CA) и вправо с проекцией $T\cos\alpha$ (участок AB), равнодействующая $T(1-\cos\alpha)$

направлена влево, туда же, куда ускорение:

$$m\,a = T\,(1 - \cos\alpha).$$

6. Отношение масс. Разделим первое уравнение на второе: T и a сокращаются.

$$\frac{M}{m}\,(1 - \cos\alpha) = \frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \frac{M}{m} = \frac{\cos\alpha}{(1 - \cos\alpha)^2} = \frac{3/5}{(2/5)^2} = \frac{15}{4}.$$

Ничего другого о массах не нужно: клин в $15/4$ раза легче шара. Для проверки найдём натяжение: из второго уравнения

$$T = \frac{ma}{1 - \cos\alpha} = \frac{15}{8}\,mg = \frac{1}{2}\,Mg,$$

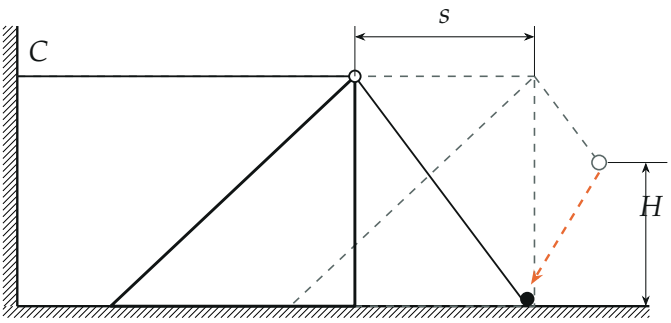
и вертикальный закон для шара $M(-a\sin\alpha) = T\sin\alpha - Mg$ с этим T даёт $-\frac{3}{5}Mg = \frac{2}{5}Mg - Mg$ — верно.

Пункт 4.

7. Движение шара по вертикали. Шар начинает движение из покоя, ускорение постоянно, поэтому его вертикальная составляющая постоянна: $a_y = a\sin\alpha = \frac{3}{4}g\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}g$. Высота H проходится за время t:

$$H = \frac{a\sin\alpha}{2}\,t^2 \quad\Longrightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2H}{a\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2H}{g\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{10H}{3g}}.$$

Второй способ — в системе клина: шар скользит вдоль нити с ускорением a и должен пройти путь $s = H/\sin\alpha$ (подъём нити на высоту H по вертикали при угле α); из $s = at^2/2$ получаем то же выражение.



Положения системы в начале (серый пунктир) и в момент, когда шар достиг стола. Клин сместился на $s = \frac{5}{4}H$, шар — на $\frac{1}{2}H$ влево и на H вниз; $\operatorname{tg}\beta = H/(H/2) = 2$.

Сверка с пунктом 1: за то же время клин проехал $s = at^2/2 = \frac{3}{8}gt^2 = \frac{5}{4}H$ (так как $H = \frac{3}{10}gt^2$), а шар сместился по горизонтали на $s(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}H$ при вертикальном смещении H, то есть траектория идёт под углом $\operatorname{tg}\beta = 2$.

Обратите внимание. Нить действует на блок *двумя* участками, поэтому на клин горизонтально действует $T(1 - \cos\alpha)$, а не T и не $T\cos\alpha$. Ускорение шара направлено не вдоль нити и не по вертикали: оно складывается из двух равных по модулю векторов. Блок лёгкий: у него нет массы, и его собственные уравнения в систему не входят.

Проверка. Размерности: $a \sim g$, M/m безразмерно, $t \sim \sqrt{H/g}$ — верно. Энергия: шар опустился на H, и потенциальная энергия MgH перешла в кинетическую шара и клина. Скорость клина at, скорость шара $at\sqrt{2 - 2\cos\alpha} = at\sqrt{0{,}8}$ (длина стороны OP_2 равнобедренного треугольника из рисунка), поэтому

$$E_к = \frac{1}{2}m(at)^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0{,}8\,(at)^2 = \frac{1}{2}(at)^2(m + 3m) = 2m\,a^2t^2,$$

$$a^2t^2 = \frac{9}{16}g^2\cdot\frac{10H}{3g} = \frac{15}{8}\,gH.$$

Тогда $E_к = \frac{15}{4}\,mgH = MgH$: закон сохранения энергии выполнен, значит, все четыре ответа согласованы между собой. Смысл: шар «тянет»

клин за собой, и чем легче клин, тем быстрее он едет; при отношении масс $15/4$ клин получает $\frac{3}{4}g$.

Ответ. 1) $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$ (вниз и в сторону стены); 2) $a = \frac{3}{4}g$; 3) $\frac{M}{m} = \frac{15}{4}$; 4) $t = \sqrt{\frac{10H}{3g}}$.