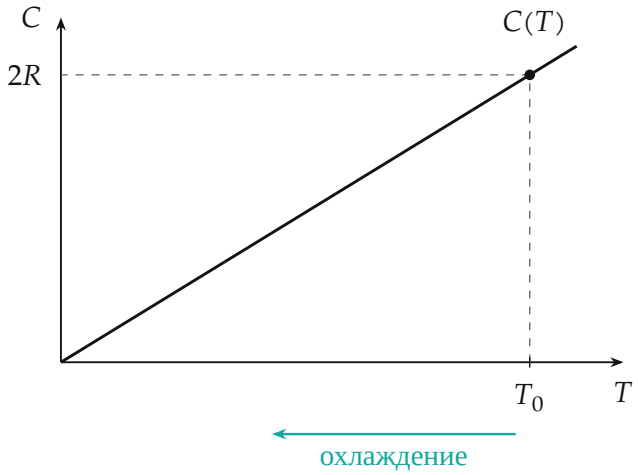
Охлаждение гелия с линейной теплоёмкостью

Задача 2. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 2] Гелий в количестве ν моль охлаждается от начальной температуры T_0 в процессе с молярной теплоёмкостью, зависящей от температуры T линейно: $C(T) = 2R\dfrac{T}{T_0}$. Здесь R — универсальная газовая постоянная. Гелий считать идеальным газом.

1. Какое количество теплоты Q_1 ($Q_1 > 0$) отдаст газ в таком процессе при уменьшении температуры от T_0 до $\dfrac{5}{6}T_0$?
2. До какой температуры надо охладить газ, чтобы газ совершил минимальную работу?
3. Найти эту минимальную работу.

Рисунка в условии нет. Для наглядности изобразим зависимость теплоёмкости процесса от температуры.



Теплоёмкость процесса растёт пропорционально температуре. Газ охлаждают от T_0, то есть идут по прямой справа налево.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача по термодинамике на процесс с заданной зависимостью теплоёмкости от температуры. Теплоёмкость $C(T)$ связывает теплоту с изменением температуры: для малого шага

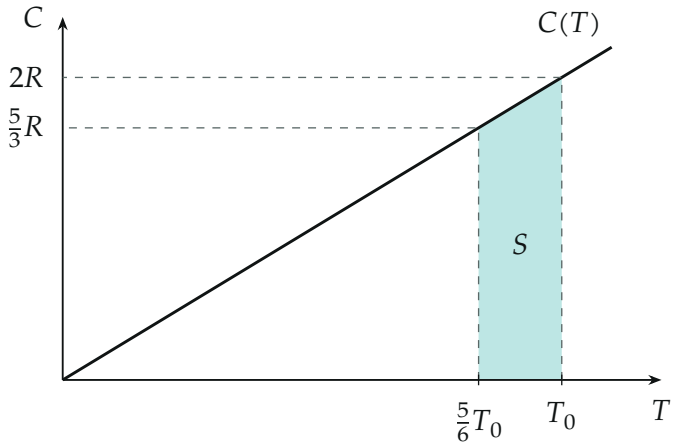
$\delta Q = \nu C(T)\,\Delta T$. Суммировать такие шаги — значит искать площадь под графиком $C(T)$ (по оси T), а график здесь прямая линия, и площадь — трапеция. Работу найдём из первого начала термодинамики: $A = Q - \Delta U$, где внутренняя энергия гелия (одноатомного идеального газа) зависит только от температуры: $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$, как бы ни шёл процесс. Работа окажется квадратичной функцией конечной температуры, и её минимум — вершина параболы.

Обозначения. Q — теплота, *полученная* газом (при охлаждении $Q < 0$, а $Q_1 = -Q$); A — работа газа; $C_V = \frac{3}{2}R$ — молярная теплоёмкость гелия при постоянном объёме; T — конечная температура охлаждения.

Пункт 1.

1. Теплота как площадь. Из первого закона для малого шага: $\delta Q = \nu C\,\Delta T$. Просуммируем по всему охлаждению от T_0 до T: Q равна площади фигуры под графиком $C(T)$ между T_0 и T, взятой со знаком «минус», потому что температура убывает. Для линейной $C(T)$ эта фигура — трапеция, и

$$Q = \nu \cdot \frac{1}{2}(C(T) + C(T_0))\,(T - T_0).$$



Площадь S трапеции под графиком равна $|Q|/\nu$. Основания — $C(\frac{5}{6}T_0) = \frac{5}{3}R$ и $C(T_0) = 2R$, высота — $\frac{1}{6}T_0$.

2. Подстановка. Здесь $T = \frac{5}{6}T_0$, $C(T) = \frac{5}{3}R$, $C(T_0) = 2R$:

$$-Q_1 = \nu \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}R + 2R\right)\left(\frac{5}{6}T_0 - T_0\right) = -\frac{11}{36}\,\nu R T_0.$$

Значит, $Q_1 = \dfrac{11}{36}\,\nu R T_0$. Второй способ — интеграл:

$$Q_1 = \nu \int_{5T_0/6}^{T_0} \frac{2RT}{T_0}\,dT = \frac{\nu R}{T_0}\left(T_0^2 - \frac{25}{36}T_0^2\right) = \frac{11}{36}\,\nu R T_0.$$

Знак: газ *отдаёт* теплоту, то есть получает отрицательную, и по условию $Q_1 > 0$.

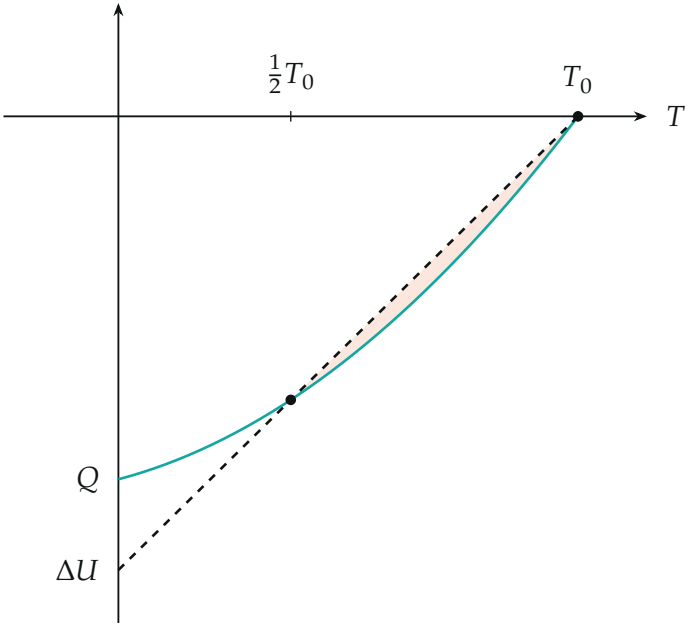
Пункт 2.

3. Работа как функция конечной температуры. Подставим в формулу для Q значение $C(T) + C(T_0) = 2R\,\dfrac{T + T_0}{T_0}$:

$$Q(T) = \nu R\,\frac{(T + T_0)(T - T_0)}{T_0} = \nu R\,\frac{T^2 - T_0^2}{T_0}.$$

Первый закон термодинамики: $A = Q - \Delta U$ (полученная теплота идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа), при этом $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,(T - T_0)$:

$$A(T) = \nu R\,\frac{(T - T_0)(T + T_0)}{T_0} - \frac{3}{2}\,\nu R\,(T - T_0) = \frac{\nu R}{2T_0}\,(T - T_0)(2T - T_0).$$

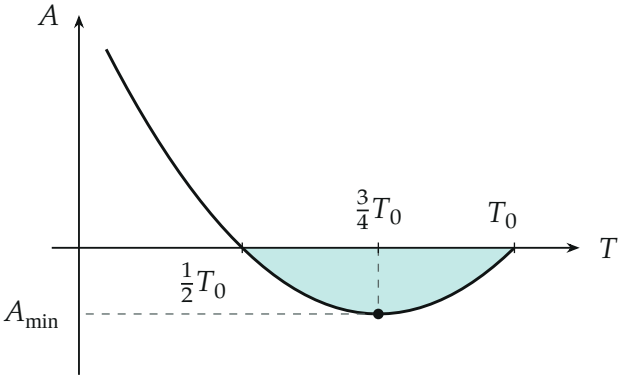


Бирюзовая кривая — $Q(T)$, штриховая прямая — $\Delta U(T)$; по вертикали единица $\nu R T_0$. Они совпадают при $T = \frac{1}{2}T_0$ и $T = T_0$; розовая область между ними — там $A = Q - \Delta U < 0$.

4. Минимум. $A(T)$ — парабола ветвями вверх с нулями $T = \frac{1}{2}T_0$ и $T = T_0$ (в этих точках $Q = \Delta U$). Вершина лежит посередине между нулями:

$$T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T_0 + T_0\right) = \frac{3}{4}T_0.$$

Эта температура достижима: $T_M < T_0$, а охлаждаем мы именно от T_0 вниз. Поэтому работа минимальна, когда газ охлаждён до $\frac{3}{4}T_0$.



Работа газа $A(T)$ при охлаждении до температуры T. Минимум достигается при $T = \frac{3}{4}T_0$; отрицательная часть закрашена (над газом совершается работа).

Пункт 3.

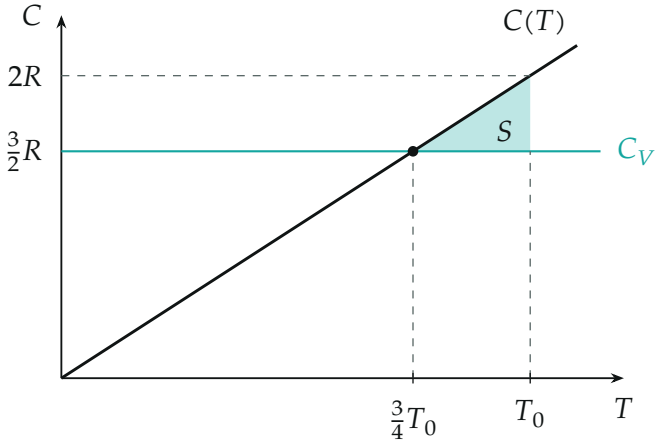
5. Минимальная работа. Подставим T_M:

$$A_{\min} = A\left(\tfrac{3}{4}T_0\right) = \frac{\nu R}{2T_0}\left(-\frac{1}{4}T_0\right)\left(\frac{1}{2}T_0\right) = -\frac{1}{16}\,\nu R T_0.$$

Знак «минус»: при таком охлаждении не газ совершает работу, а над ним, то есть сжатие — и это наименьшее значение работы (наименьшее *алгебраически*, она самая «отрицательная»).

6. Второй способ — через теплоёмкость. Для малого шага $\delta A = \delta Q - \delta U = \nu\,(C - C_V)\,\Delta T$. При охлаждении $\Delta T < 0$. Пока $C > C_V$ (то есть $T > \frac{3}{4}T_0$), каждый шаг уменьшает A; как только $C < C_V$, работа начинает расти. Минимум — там, где $C(T) = C_V$: $2R\,T/T_0 = \frac{3}{2}R$, $T = \frac{3}{4}T_0$, как и выше. Работа $A_{\min}$ — это площадь треугольника между $C(T)$ и горизонталью C_V от $\frac{3}{4}T_0$ до T_0, взятая с минусом:

$$A_{\min} = -\nu \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{T_0}{4} \cdot \left(2R - \frac{3}{2}R\right) = -\frac{1}{16}\,\nu R T_0.$$



Работа $A = \nu \int (C - C_V)\, dT$: закрашенный треугольник S даёт $|A_{\min}|/\nu$ — от $\frac{3}{4}T_0$ до T_0 теплоёмкость процесса больше C_V.

Обратите внимание. В формуле для Q стоит теплоёмкость *процесса* $C(T)$, а в формуле для ΔU — теплоёмкость при постоянном объёме $\frac{3}{2}R$: внутренняя энергия идеального газа не знает, каким путём шла температура. Ответ $Q_1 > 0$ — теплота, отданная газом; в $Q = \nu \ldots (T - T_0)$ она отрицательна. «Минимальная работа» — наименьшее значение $A(T)$ как числа, а не по модулю: она отрицательна.

Проверка. Размерности: $\nu R T_0$ — энергия (моль·Дж/(моль·К)·К = Дж). Предел: при $T \to T_0$ получаем $Q \to 0$ и $A \to 0$. Вершина параболы совпала с условием $C = C_V$ из второго способа, а оба способа дали одинаковое значение $-\frac{1}{16}\nu R T_0$. Смысл: пока $T > \frac{3}{4}T_0$, теплоёмкость процесса больше C_V и охлаждение отнимает у газа больше теплоты, чем уносит убыль внутренней энергии, поэтому работа уменьшается; ниже $\frac{3}{4}T_0$ теплоёмкость меньше C_V, и работа снова растёт.

Ответ. 1) $Q_1 = \dfrac{11}{36}\nu R T_0$; 2) $T = \dfrac{3}{4}T_0$; 3) $A_{\min} = -\dfrac{1}{16}\nu R T_0$.