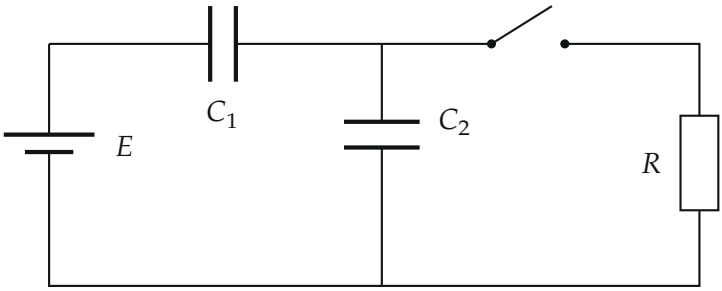
Заряд конденсаторов через резистор после замыкания ключа

Задача 3. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 3] Цепь собрана из предварительно незаряженных конденсаторов. Ключ разомкнут, режим установился (см. рис.). Параметры цепи указаны на схеме, причём $C_2 = C$, $C_1 = 2C$, источник идеальный. Ключ замыкают.



1. Найти ток через резистор сразу после замыкания ключа.
2. Какое количество теплоты выделится в цепи после замыкания ключа?
3. Найти ток в резисторе после замыкания ключа в момент, когда ток через C_1 равен I_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это цепь постоянного тока с конденсаторами и резистором (переходный процесс). Главное свойство конденсатора: его заряд, а значит, и напряжение, не могут измениться скачком — для этого понадобился бы бесконечный ток. Поэтому в момент замыкания ключа заряды обоих конденсаторов такие же, как были при разомкнутом ключе, и их найдём по условию равновесия. Затем резистор оказывается подключённым к конденсатору C_2, тот разряжается через него, а источник дозаряжает C_1. Для теплоты удобен энергетический баланс «работа источника = теплота + изменение энергии конденсаторов»: детали переходного процесса не нужны, только начальное и конечное состояния. Для связи токов в произвольный момент нужны два закона: напряжение на идеальном источнике всё время равно E, а заряд изолированного узла сохраняется.

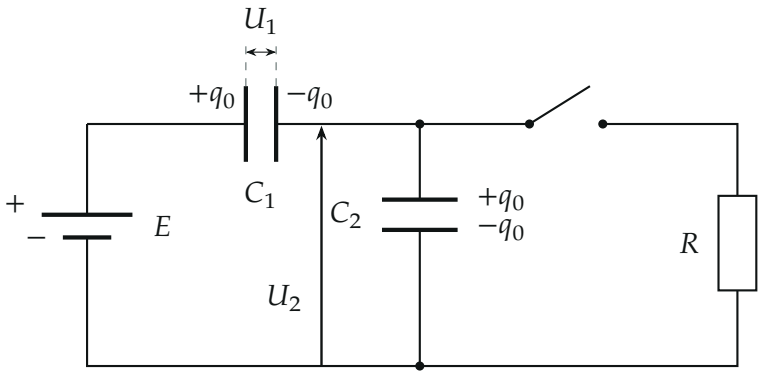
Обозначения. q_0 — заряд каждого из конденсаторов до замыкания, U_1, U_2 — напряжения на C_1, C_2, I_1 — ток через C_1 (вправо, он заряжает C_1), I_2 — ток в проводе к C_2 (положительным считаем ток, заряжающий верхнюю обкладку), I_R — ток через резистор.

Пункт 1.

1. Состояние до замыкания. В установившемся режиме ток через конденсаторы не идёт, и ключ разомкнут, поэтому C_1 и C_2 соединены последовательно и подключены к источнику. Между ними находится изолированный участок (правая обкладка C_1, верхняя обкладка C_2 и соединяющий их провод), его суммарный заряд нулевой, значит, заряды конденсаторов одинаковы по модулю: q_0. Напряжения складываются: $U_1 + U_2 = E$ (обход контура с источником), поэтому

$$\frac{q_0}{C_1} + \frac{q_0}{C_2} = E \quad \Longrightarrow \quad q_0 = E\,\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3}\,CE,$$

$$U_1 = \frac{q_0}{C_1} = \frac{E}{3}, \qquad U_2 = \frac{q_0}{C_2} = \frac{2E}{3}.$$



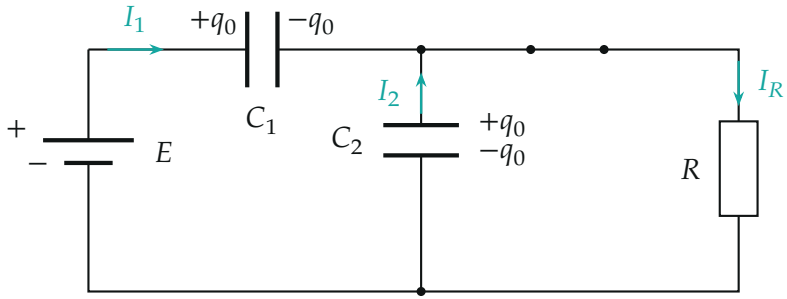
Ключ разомкнут: на обоих конденсаторах заряд $q_0 = \frac{2}{3}CE$, напряжения $U_1 = \frac{1}{3}E$, $U_2 = \frac{2}{3}E$ (напряжения показаны стрелками).

2. Ток сразу после замыкания. Заряд C_2 в первый миг прежний, поэтому прежним остаётся и напряжение $U_2 = \frac{2}{3}E$. После замыкания ключа резистор соединяет верхнюю обкладку C_2 с нижним проводом, то

есть оказывается подключённым к C_2 параллельно. Напряжение на резисторе равно напряжению на C_2, и по закону Ома

$$I_R(0) = \frac{U_2}{R} = \frac{2E}{3R}.$$

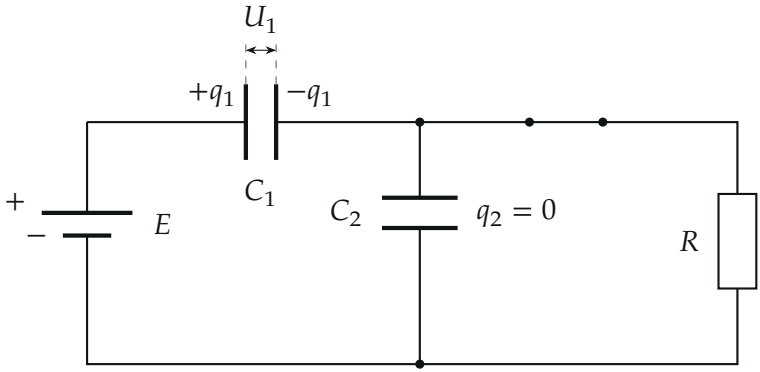
Ток течёт от положительной обкладки C_2 через резистор к отрицательной (сверху вниз по резистору), C_2 начинает разряжаться.



Сразу после замыкания ключа токи на схеме: I_1 — через C_1 (заряжает его), I_2 — в проводе к C_2 (он разряжается, реальный ток течёт вверх, поэтому $I_2 < 0$), I_R — через резистор.

Пункт 2.

3. Конечное состояние. Спустя долгое время токи прекращаются. Напряжение на резисторе равно нулю, значит, и на C_2 напряжение нулевое: $q_2 = 0$. Контур с источником требует $U_1 + U_2 = E$, поэтому $U_1 = E$ и заряд C_1 стал $q_1 = C_1E = 2CE$.



Конечное состояние: C_2 разряжен, C_1 заряжен до напряжения источника, токов нет.

4. Энергетический баланс. Вся работа источника A идёт на изменение энергии конденсаторов ΔW и на тепло Q в резисторе (провода и источник идеальные): $A = \Delta W + Q$. Через источник прошёл заряд, добавившийся на C_1: $\Delta q = q_1 - q_0 = \frac{4}{3}CE$ (на C_2 в итоге заряда нет, а сумма зарядов узла сохраняется нулевой). Поэтому

$$A = E\,\Delta q = \frac{4}{3}\,CE^2.$$

Энергия конденсаторов: сначала $W_0 = \dfrac{q_0^2}{2C_1} + \dfrac{q_0^2}{2C_2} = \dfrac{1}{3}CE^2$, в конце $W_1 = \dfrac{C_1E^2}{2} = CE^2$:

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{2}{3}\,CE^2, \qquad Q = A - \Delta W = \frac{4}{3}\,CE^2 - \frac{2}{3}\,CE^2 = \frac{2}{3}\,CE^2.$$

Заметим, что источник отдал вдвое больше, чем осталось запасённым: половина ушла на тепло.

Пункт 3.

5. Связь токов в произвольный момент. Источник идеальный, поэтому в любой момент выполнено $U_1 + U_2 = E$. За малое время Δt напряжения меняются на $\Delta U_1 = \dfrac{I_1\Delta t}{C_1}$ и $\Delta U_2 = \dfrac{I_2\Delta t}{C_2}$, а их сумма постоянна: $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$. Отсюда

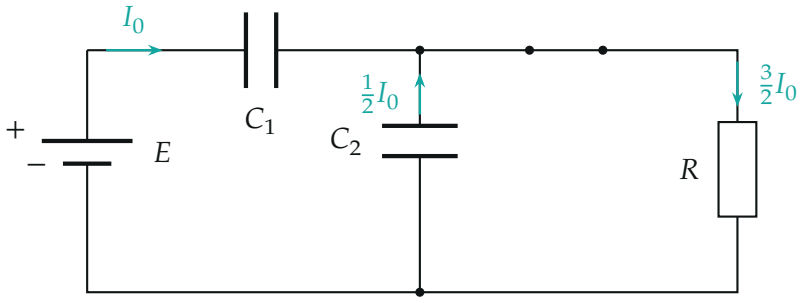
$$\frac{I_1}{C_1} = -\frac{I_2}{C_2} \quad\Longrightarrow\quad I_2 = -\frac{C_2}{C_1}\,I_1 = -\frac{1}{2}\,I_1.$$

Минус означает, что C_2 в этот момент разряжается, пока C_1 заряжается.

6. Ток в резисторе. Узел — правая обкладка C_1, верхняя обкладка C_2 и провод к ключу — электрически изолирован, поэтому его заряд сохраняется и ток из него в резистор равен сумме токов, пришедших по двум ветвям (закон сохранения заряда для узла): $I_R = I_1 + (-I_2)$, где $-I_2$ — ток разряжающегося C_2. По условию $I_1 = I_0$, значит $I_2 = -\frac{1}{2}I_0$,

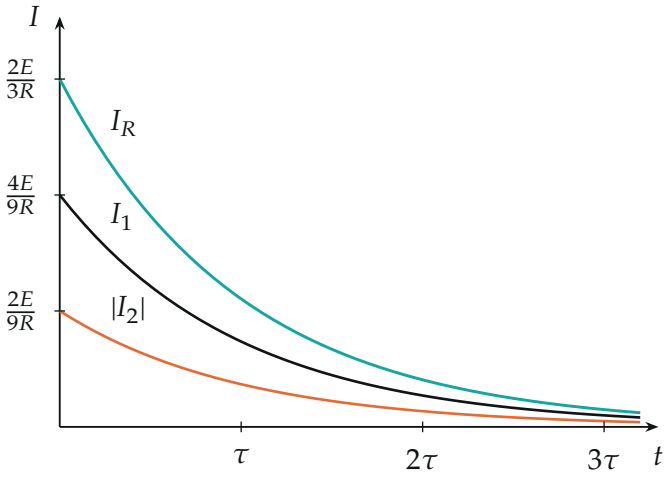
и

$$I_R = I_0 + \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{2} I_0.$$



Токи в момент, когда $I_1 = I_0$: C_1 заряжается током I_0, C_2 разряжается током $\frac{1}{2}I_0$, оба идут в резистор.

7. Как токи меняются со временем. Закон сохранения заряда для C_2 и закон Ома дают $\dfrac{dU_2}{dt} = \dfrac{I_2}{C_2} = -\dfrac{I_R}{3C_2} = -\dfrac{U_2}{3RC}$, так как $I_R = U_2/R$ и $I_2 = -I_R/3$. Решение — убывающая экспонента $U_2 = \frac{2}{3} E\, e^{-t/\tau}$ с $\tau = 3RC$, и все три тока убывают по этому же закону в отношении $I_R : I_1 : |I_2| = 3 : 2 : 1$.



Токи после замыкания ключа. Отношение $3:2:1$ *сохраняется в любой момент,* $\tau = 3RC$.

Это даёт второй способ для теплоты: $Q = \int_0^\infty I_R^2 R\,dt = I_R^2(0)\,R\,\frac{\tau}{2} = \frac{4E^2}{9R^2}\cdot R\cdot\frac{3RC}{2} = \frac{2}{3}CE^2$ — то же, что и в пункте 2.

Обратите внимание. Резистор подключён не к источнику, а к C_2: поэтому $I_R(0) = U_2/R = \frac{2E}{3R}$, а не E/R; напряжение E в первый миг почти целиком «спрятано» на конденсаторах. Работа источника $A = \frac{4}{3}CE^2$ не равна теплоте: половина её уходит в энергию конденсаторов. Токи I_1 и I_2 имеют *разные знаки*, в резисторе они складываются.

Проверка. Размерности: E/R — ток; CE^2 — энергия. Начальные значения согласуются: из $I_R = \frac{3}{2}I_1$ при $I_R(0) = \frac{2E}{3R}$ получаем $I_1(0) = \frac{4E}{9R}$, и баланс мощностей в нулевой момент выполнен: $EI_1 = \frac{4E^2}{9R}$ — мощность источника, $I_R^2R = \frac{4E^2}{9R}$ — тепловая мощность, а скорость роста энергии конденсаторов $U_1I_1 + U_2I_2 = \frac{E}{3}\cdot\frac{4E}{9R} - \frac{2E}{3}\cdot\frac{2E}{9R} = 0$. Теплота двумя способами совпала. Смысл: разряд C_2 идёт так, будто к резистору подключена ёмкость $C_1 + C_2 = 3C$ (источник для переменных токов — короткое замыкание), поэтому время разряда $3RC$.

Ответ. 1) $I_R(0) = \dfrac{2E}{3R}$; 2) $Q = \dfrac{2}{3}CE^2$; 3) $I = \dfrac{3}{2}I_0$.