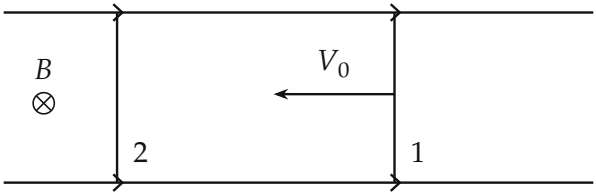
Две перемычки на рельсах в магнитном поле

Задача 4. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 4] По двум параллельным хорошо проводящим рельсам, находящимся в одной горизонтальной плоскости и в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B могут скользить без трения две перемычки (см. рис.). Расстояние между рельсами L. Перемычка 1 имеет массу m и сопротивление R, у перемычки 2 масса $2m$ и сопротивление $2R$. Вначале перемычки покоились. Затем перемычке 1 сообщили скорость V_0 в направлении второй перемычки. Известно, что перемычки не столкнулись. Индуктивность контура из перемычек и рельсов не учитывать.



1. Найдите ускорение перемычки 2 в начальный момент.
2. Найдите скорость каждой перемычки через продолжительный промежуток времени.
3. Найдите расстояние между перемычками через продолжительный промежуток времени, если в начальный момент расстояние между ними было S_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это электромагнитная индукция в контуре с движущимися перемычками. Перемычка 1 едет к перемычке 2, площадь контура уменьшается, магнитный поток меняется, и в контуре возникает ЭДС индукции. Ток один на весь контур (перемычки и рельсы соединены последовательно). Магнитное поле действует на оба участка с током силой Ампера: перемычку 1 тормозит, перемычку 2 разгоняет. Эти силы равны по модулю и противоположны по направлению (ток один и тот же, длина L и индукция B одни и те же), поэтому суммарный импульс перемычек сохраняется. Ток прекратится, когда перемычки поедут с одинаковой скоростью — тогда площадь контура перестанет меняться.

Обозначения. V_1, V_2 — скорости перемычек 1 и 2 (в направлении начального движения перемычки 1, то есть влево), S — расстояние между перемычками, I — ток в контуре, $\mathcal{E}$ — ЭДС, $R_\Sigma = R+2R = 3R$ — полное сопротивление контура (рельсы хорошо проводят, их сопротивлением пренебрегаем).

Пункт 1.

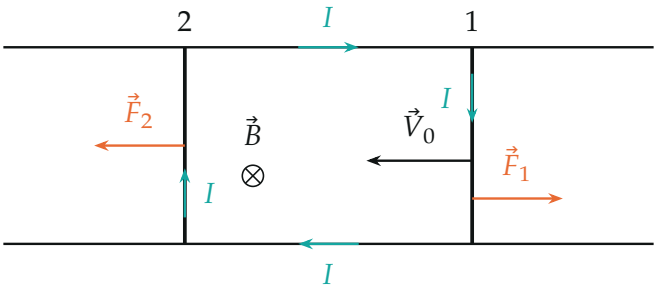
1. ЭДС и ток в начальный момент. Магнитный поток через контур $\Phi = BLS$, где S — расстояние между перемычками. По закону индукции Фарадея модуль ЭДС равен скорости изменения потока. Перемычки сближаются, $\dfrac{dS}{dt} = -(V_1 - V_2)$, поэтому

$$\mathcal{E} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = BL\left|\frac{dS}{dt}\right| = BL\,(V_1 - V_2).$$

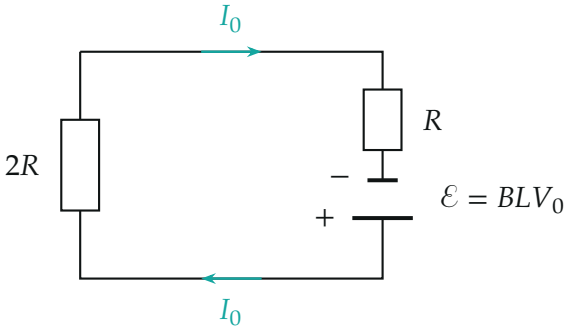
В начальный момент $V_1 = V_0$, $V_2 = 0$, поэтому $\mathcal{E} = BLV_0$, и по закону Ома для замкнутой цепи

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2R} = \frac{BLV_0}{3R}.$$

Направление тока: площадь контура убывает, поток вниз (вектор B направлен от нас) уменьшается, и индукционный ток по правилу Ленца создаёт поле в ту же сторону — он идёт по часовой стрелке.



Ток в контуре идёт по часовой стрелке. Сила Ампера $\vec{F}_1$ на перемычку 1 направлена против её скорости, $\vec{F}_2$ на перемычку 2 — по движению (влево). Модули $F_1 = F_2 = BIL$.



Эквивалентная схема в начальный момент: источник с ЭДС $\mathcal{E} = BLV_0$ (перемычка 1, она движется) и два последовательных сопротивления.

2. Сила и ускорение. Сила Ампера на перемычку 2 (длина L в поле B, ток I_0 перпендикулярен полю) $F_2 = BI_0L$. Второй закон Ньютона для перемычки 2 (масса $2m$) в проекции на рельсы:

$$2m\,a_{02} = BI_0L \quad \Longrightarrow \quad a_{02} = \frac{B^2L^2V_0}{3R\cdot 2m} = \frac{1}{6}\,\frac{B^2V_0L^2}{mR}.$$

Сила направлена влево (по движению перемычки 1): перемычка 2 ускоряется.

Пункт 2.

3. Закон сохранения импульса. Рассмотрим систему «перемычка 1 + перемычка 2». На перемычки действуют силы Ампера, равные BIL и направленные противоположно, поэтому их сумма равна нулю; сила тяжести и реакция рельсов вертикальны, трения нет. Значит, горизонтальный импульс системы сохраняется:

$$mV_0 = mV_1 + 2mV_2.$$

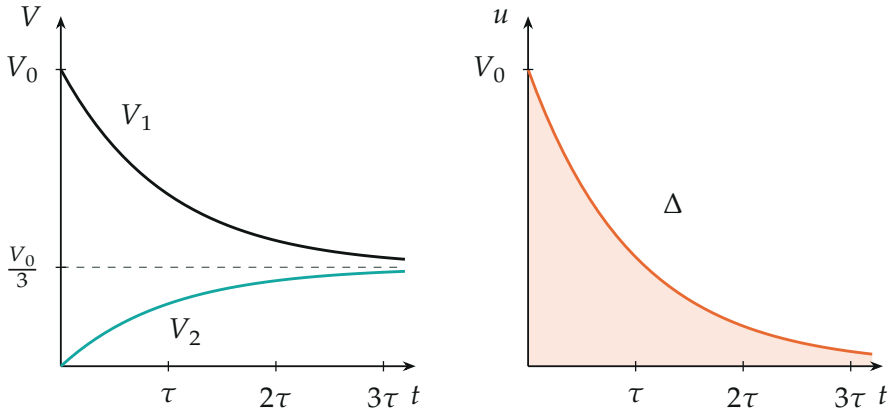
4. Конец процесса. Ток идёт, пока $V_1 \neq V_2$ (ЭДС $= BL(V_1 - V_2)$). Через долгое время ток прекращается, и скорости становятся одинаковыми: $V_1 = V_2 = V$. Тогда $mV_0 = (m + 2m)V$, и

$$V = \frac{V_0}{3} \quad \text{(у обеих перемычек).}$$

Почему скорости именно сравниваются, видно из закона для разности $u = V_1 - V_2$. Для перемычек $m\dfrac{dV_1}{dt} = -BIL$ и $2m\dfrac{dV_2}{dt} = BIL$, а $I = \dfrac{BLu}{3R}$, поэтому

$$\frac{du}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{BIL}{m} = -\frac{B^2L^2}{2mR}u \quad \Longrightarrow \quad u = V_0 e^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{2mR}{B^2L^2}:$$

разность скоростей убывает по экспоненте к нулю.



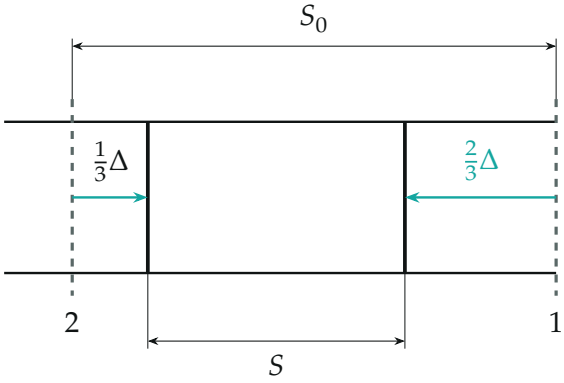
Скорости перемычек и их разность $u = V_1 - V_2 = V_0 e^{-t/\tau}$. Скорости сходятся к $\frac{1}{3}V_0$. Закрашенная площадь под графиком u — уменьшение расстояния Δ.

Пункт 3.

5. Что считаем. Нужно изменение расстояния $\Delta = S_0 - S$ за всё время. Оно равно $\Delta = \int (V_1 - V_2)\,dt$, то есть площади под графиком $u(t)$, и связано с зарядом, прошедшим по контуру: заряд в контуре $q = \int I\,dt = \dfrac{BL}{3R}\int (V_1 - V_2)\,dt = \dfrac{BL\Delta}{3R}$.

6. Импульс силы Ампера. Для перемычки 2: $2m\,\Delta V_2 = BIL\,\Delta t$ на малом шаге. Сложим такие равенства за всё время: $2m\,(V - 0) = BL\,q$. Подставим заряд:

$$2m \cdot \frac{V_0}{3} = BL \cdot \frac{BL\Delta}{3R} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{2mRV_0}{B^2L^2}.$$



Положения перемычек в системе отсчёта центра масс (она сама едет влево со скоростью $V_0/3$): серый пунктир — начало, чёрные линии — конец. Перемычка 1 сдвигается на $\frac{2}{3}\Delta$, перемычка 2 на $\frac{1}{3}\Delta$ (обратно пропорционально массам).

Расстояние между перемычками через долгое время

$$S = S_0 - \Delta = S_0 - \frac{2V_0Rm}{B^2L^2}.$$

Второй способ: $\Delta = \int_0^\infty V_0 e^{-t/\tau}\,dt = V_0\tau = \dfrac{2mRV_0}{B^2L^2}$ — то же значение.

Обратите внимание. Масса перемычки 2 и её сопротивление в ускорении стоят отдельно: сила определяется общим током $\dfrac{BLV_0}{R+2R}$, а ускорение — массой $2m$. ЭДС создаётся относительным движением перемычек, а не скоростью одной из них.

Проверка. Размерности: $B^2L^2V_0/(mR)$ — ускорение, $mRV_0/(B^2L^2)$ — длина (B^2L^2/R измеряется в Н · с/м). Энергия: кинетическая энергия в начале $\frac{1}{2}mV_0^2$, в конце $\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\frac{V_0^2}{9} = \frac{1}{6}mV_0^2$, разность $\frac{1}{3}mV_0^2$ выделилась теплом в R и $2R$; интеграл $\int I^2\,3R\,dt = \dfrac{B^2L^2V_0^2}{3R}\cdot\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{1}{3}mV_0^2$ даёт то же самое. Смысл: условие «не столкнулись» означает $S_0 > \Delta$.

Ответ. 1) $a_{02} = \dfrac{1}{6}\dfrac{B^2V_0L^2}{mR}$; 2) $V_1 = V_2 = \dfrac{V_0}{3}$; 3) $S = S_0 - \dfrac{2V_0Rm}{B^2L^2}$.