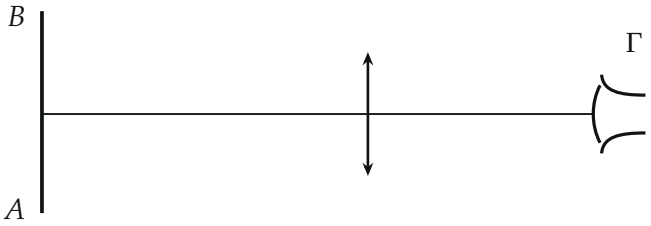
Изображение картины в линзе и глаз наблюдателя

Задача 5. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 5] Тонкая линза с фокусным расстоянием 9 см закреплена на штативе. На стене висит небольшая круглая картина AB диаметром $H = 9$ см на расстоянии 36 см от линзы (см. рис.). Наблюдатель рассматривает глазом Г действительное изображение картины в линзе, аккомодировав глаз на расстояние 24 см. Глаз и центр картины находятся на главной оптической оси линзы.



1. На каком расстоянии x от линзы расположен глаз?
2. Найти минимальный диаметр D_M линзы, при котором наблюдатель сможет увидеть целиком всё изображение картины.
3. На каком расстоянии от линзы и где между картиной и её изображением в линзе следует поместить небольшой непрозрачный экран, чтобы не видеть ни одной детали изображения?

Размерами зрачка глаза и экрана пренебречь по сравнению с диаметром линзы.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача по геометрической оптике на тонкую линзу. Линза строит действительное изображение картины A_1B_1 с той стороны, где стоит наблюдатель. Для глаза это изображение — обычный предмет: «аккомодировал на 24 см» значит, что глаз чётко видит предмет, находящийся на $d_0 = 24$ см *перед* глазом. Поэтому глаз стоит дальше изображения на 24 см. Размер линзы ограничивает пучок лучей, и нужно, чтобы через неё прошли лучи от самых крайних точек изображения в зрачок. Для экрана используем обратимость хода

лучей: зрачок — точка, поэтому все лучи, попавшие в него после линзы, прошли через одну и ту же точку перед линзой — сопряжённую зрачку. Законы: формула тонкой линзы, подобие треугольников, обратимость световых лучей.

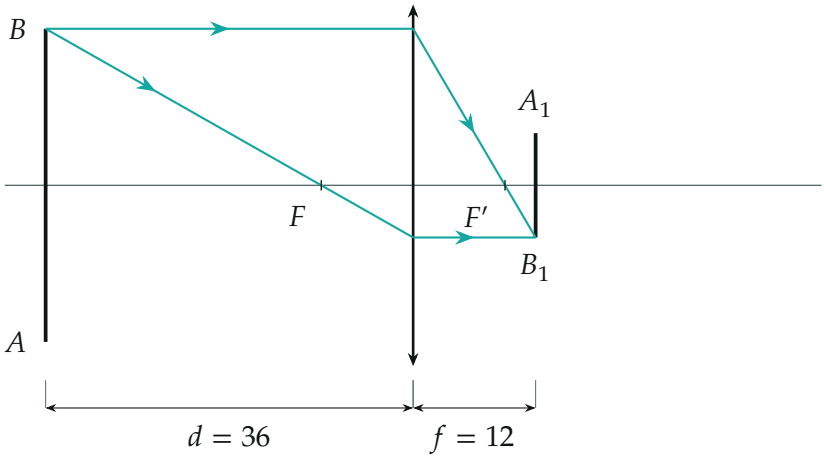
Обозначения. $F = 9$ см — фокусное расстояние, $d = 36$ см — расстояние от картины до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, $H = 9$ см — диаметр картины, h — диаметр изображения, $d_0 = 24$ см — расстояние от глаза до изображения, x — расстояние от линзы до глаза, z — расстояние от линзы до экрана.

Пункт 1.

1. Положение изображения. Для тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ (предмет слева от линзы, изображение действительное — справа):

$$f = \frac{dF}{d - F} = \frac{36 \cdot 9}{36 - 9} = 12 \text{ см}.$$

Построение сразу показывает то же: луч от B параллельно оси после линзы идёт через правый фокус F', луч через левый фокус F выходит из линзы параллельно оси — они пересекаются в точке B_1 на расстоянии 12 см за линзой. Луч через центр линзы не преломляется и приходит в ту же точку (это использовано ниже).



Изображение картины AB в линзе (по горизонтали и вертикали масштаб разный: вертикальный увеличен). Два луча от точки B сходятся в точке B_1.

2. Положение глаза. Глаз видит изображение как предмет на расстоянии $d_0 = 24$ см перед собой. Изображение лежит на расстоянии 12 см от линзы, значит, глаз правее изображения:

$$x = f + d_0 = 12 + 24 = 36 \text{ см}.$$

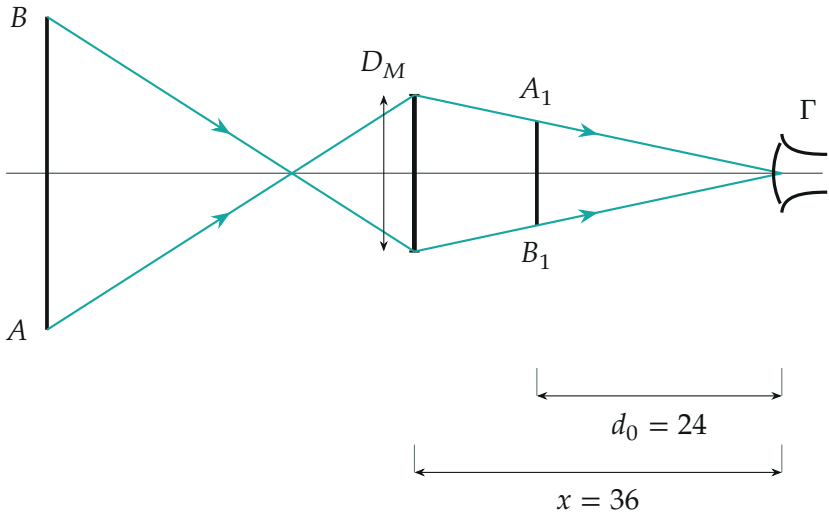
Пункт 2.

3. Размер изображения. Из подобия треугольников построения (луч через центр линзы) увеличение равно f/d, и диаметр изображения

$$h = H\frac{f}{d} = 9 \cdot \frac{12}{36} = 3 \text{ см}.$$

Изображение перевёрнуто: B_1 внизу, A_1 вверху.

4. Какие лучи нужны. Из каждой точки изображения идёт расходящийся пучок, а зрачок — точка на оси. Единственный луч из B_1, попадающий в зрачок, — прямая от B_1 к зрачку. Если продолжить её назад, она пересечёт плоскость линзы в точке, через которую свет от B *действительно* должен пройти. Если линза не охватывает эту точку, точка B_1 (а с ней и вся её часть изображения) для глаза пропадёт. Аналогично для A_1 и симметричной точки.



Ход крайних лучей в зрачок. Луч от B через край линзы идёт к B_1 и дальше в зрачок. Радиус линзы $D_M/2$ задаётся лучом «зрачок — B_1».

5. Расчёт. Рассмотрим подобные треугольники с общей вершиной в зрачке: один образован осью, лучом «зрачок — B_1» и отрезком $h/2$ изображения (катет вдоль оси равен d_0), другой — осью, тем же лучом и радиусом линзы $D_M/2$ (катет вдоль оси равен x). Отсюда

$$\frac{D_M/2}{h/2} = \frac{x}{d_0} \quad \Longrightarrow \quad D_M = h\,\frac{x}{d_0} = 3 \cdot \frac{36}{24} = 4{,}5 \text{ см}.$$

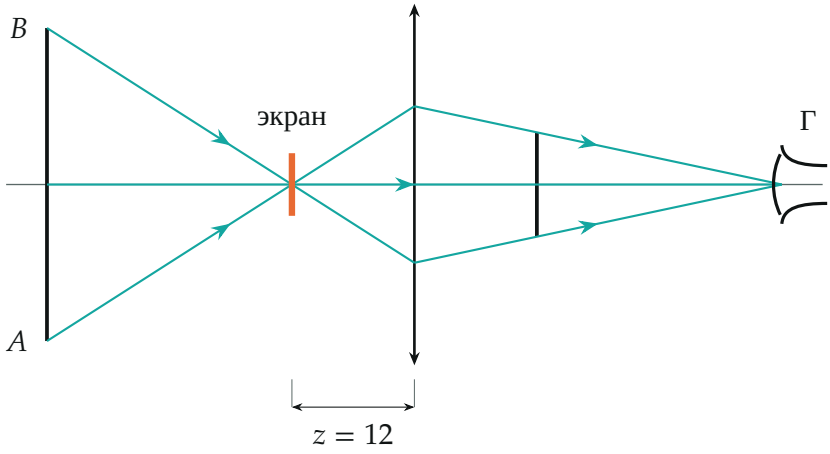
Пункт 3.

6. Идея. После линзы в зрачок попадают только лучи, идущие по прямым к зрачку. По обратимости хода лучей представим зрачок как светящийся предмет: линза построит его изображение, и все эти лучи в обратную сторону пройдут через сопряжённую точку — по формуле линзы для зрачка (расстояние $x = 36$ см) получаем

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{xF}{x - F} = \frac{36 \cdot 9}{36 - 9} = 12 \text{ см}.$$

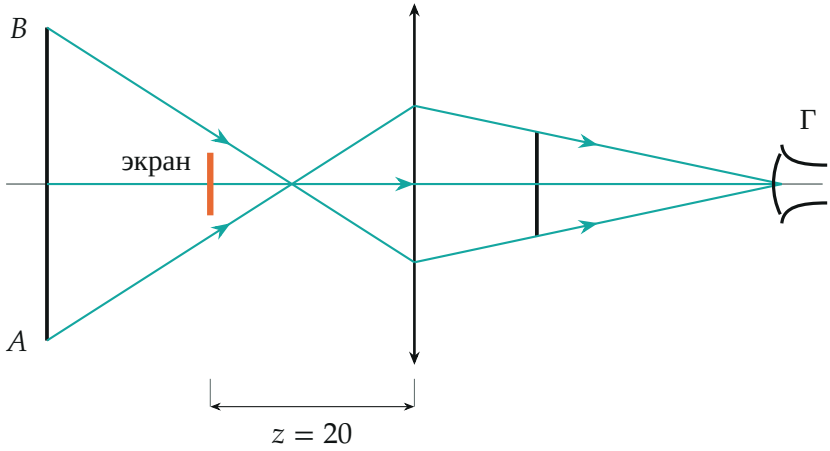
Эта точка находится слева от линзы на главной оптической оси, на 12 см от неё. Она лежит между картиной (36 см) и линзой, то есть между кар-

тиной и её изображением, как требует условие.



Все лучи, идущие в зрачок, проходят через точку S^* на оси в 12 см слева от линзы: маленький экран в этой точке закрывает всё изображение.

7. Почему именно там. Если поставить экран в другой точке оси, например на 20 см от линзы, то он закроет только осевой луч, а лучи от краёв картины пройдут выше и ниже экрана и дойдут до зрачка: глаз увидит картину без центральной детали, но не «ни одной детали».



Экран на 20 см от линзы: лучи от A и B идут мимо него в зрачок.

Обратите внимание. Глаз стоит *за* изображением (а не у него): глаз «смотрит» на изображение, как на предмет, и аккомодирует на расстояние до него. Диаметр линзы определяется не диаметром картины, а лучом в зрачок. Экран ставится не у картины и не у изображения, а в точке, сопряжённой зрачку.

Проверка. Размерности: все ответы — длины. Формула линзы симметрична относительно d и f: предмет в 36 см даёт изображение в 12 см, а «предмет» (зрачок) в 36 см даёт сопряжённую точку в 12 см — те же числа в другом порядке, это и есть обратимость лучей. Второй способ для D_M — прямой расчёт луча: прямая из $B(-36;\ 4{,}5)$ в точку $(0;\ -2{,}25)$ на линзе имеет угловой коэффициент $-6{,}75/36 = -0{,}1875$; после линзы луч идёт в зрачок $(36;\ 0)$ с коэффициентом $2{,}25/36 = 0{,}0625$ и в плоскости изображения $x = 12$ проходит на высоте $-2{,}25 + 0{,}0625 \cdot 12 = -1{,}5$ — точно через B_1. Смысл: всё изображение видно лишь в линзе от 4,5 см, а скрыть его можно крошечным экраном в одной точке.

Ответ. 1) $x = 36$ см; 2) $D_M = 4{,}5$ см; 3) экран на главной оптической оси слева от линзы на расстоянии $z = 12$ см.