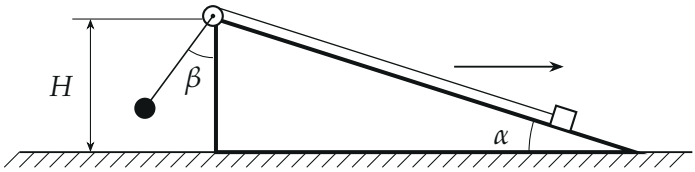
Клин, брусок и шарик на нити через блок

Задача 1. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 1] Клин с углом наклона α ($\cos\alpha = 12/13$) находится на горизонтальном столе. Через невесомый блок, укреплённый на клине, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, к концам которой привязаны шарик массой m и брусок массой $13m$ (см. рис.). Вначале систему удерживают неподвижно, расположив шарик вблизи блока на расстоянии H от стола, нить при этом не провисает. Затем клин стали двигать с постоянным горизонтальным ускорением, а шарик отпустили. Брусок и шарик пришли в движение, при этом нить, привязанная к шарику, составила угол β ($\cos\beta = 4/5$) с вертикалью. Все точки системы перемещаются в вертикальной плоскости. Трением в оси блока и бруска о клин пренебречь. Шарик достигает стола раньше, чем брусок доезжает до блока.

1. Найдите ускорение клина.
2. С каким ускорением относительно клина движется брусок?
3. Через какое время шарик достигнет стола?



▲ **Решение. Что происходит.** Клин едет вправо с постоянным ускорением, поэтому удобно перейти в систему отсчёта клина: в ней клин неподвижен, а на каждое тело массы M кроме обычных сил действует сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -M\vec{a}$ — горизонтальная, влево ($\vec{a}$ — ускорение клина). Нить нерастяжима, блок невесомый и без трения, поэтому относительно клина шарик и брусок движутся с одинаковым по модулю ускорением a_0, а натяжение нити с обеих сторон одно. Угол нити с вертикалью задан и остаётся неизменным, значит, шарик движется относительно клина вдоль нити, и поперёк нити силы на него уравновешены: из этого находим a. Затем вдоль нити (для шарика) и вдоль наклона (для бруска) —

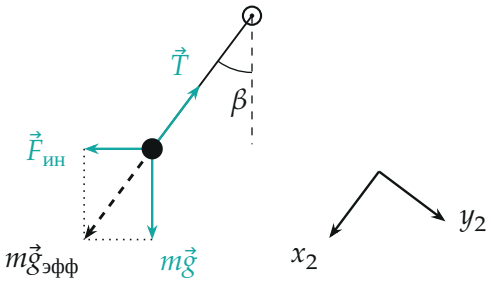
два уравнения на a_0 и T. Время — из вертикального движения шарика: клин вертикально не движется.

Обозначения. a — ускорение клина (вправо), a_0 — ускорение бруска (вверх по склону) и шарика (вниз вдоль нити) относительно клина, T — натяжение нити, N — реакция клина на брусок. Значения: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

Пункт 1.

1. Шарик поперёк нити. В системе клина на шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, натяжение $\vec{T}$ вдоль нити и сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$, $|\vec{F}_{\text{ин}}| = ma$. Ось y_2 направим перпендикулярно нити: тогда натяжение в проекцию не входит, а ускорение шарика (оно вдоль нити) проекции на y_2 не имеет. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на y_2:

$$mg\sin\beta - ma\cos\beta = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = g\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{4}g.$$



Шарик в системе клина. Сумма $m\vec{g} + \vec{F}_{ин}$ (пунктир) направлена вдоль нити; сила $\vec{T}$ тоже вдоль неё (по масштабу $T = 0{,}875\,mg$), поэтому перпендикулярной составляющей нет.

Второй способ: сумма силы тяжести и силы инерции — это «эффективная тяжесть» $m\vec{g}_{\text{эфф}}$. Треугольник сил на рисунке прямоугольный с катетами mg и ma, и вдоль нити направлена его гипотенуза: $\mathrm{tg}\,\beta = ma/mg$ — тот же результат. Знак: ускорение клина направлено вправо, шарик отстаёт, нить отклонена влево.

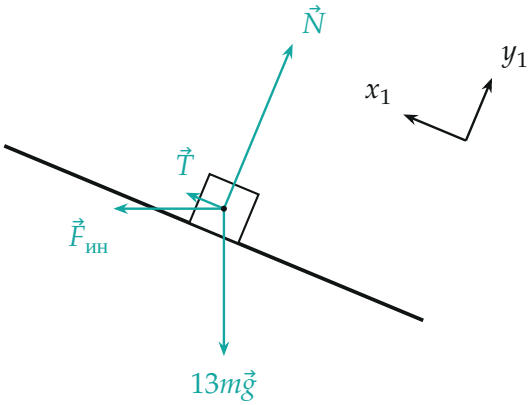
Пункт 2.

2. Шарик вдоль нити. Ось x_2 направим вдоль нити от блока вниз. Сила тяжести даёт $+mg\cos\beta$, сила инерции (она направлена влево, ось x_2 тоже уходит влево) — $+ma\sin\beta$, натяжение — $-T$:

$$ma_0 = mg\cos\beta + ma\sin\beta - T.$$

3. Брусок вдоль наклона. Ось x_1 направим вверх по склону, к блоку (в эту сторону брусок и поедет). Сила тяжести даёт $-13mg\sin\alpha$, сила инерции $13ma$ (влево) — $+13ma\cos\alpha$, натяжение — $+T$; реакция $\vec{N}$ перпендикулярна склону и в проекцию не входит (трения нет):

$$13m\,a_0 = T - 13mg\sin\alpha + 13ma\cos\alpha.$$



Брусок в системе клина. Силы $13m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{ин}$ — в масштабе; $\vec{T}$ в десять раз меньше остальных (она равна $0{,}875\,mg$) и показана условно.

4. Складываем уравнения. Неизвестных два — a_0 и T. Сложим уравнения пунктов 2 и 3, так T сократится:

$$14\,a_0 = g\cos\beta + a\sin\beta - 13g\sin\alpha + 13a\cos\alpha.$$

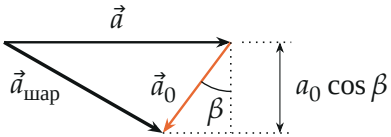
Подставим $a = \frac{3}{4}g$ и значения тригонометрических функций:

$$14\,a_0 = g\big(0{,}8 + 0{,}45 - 5 + 9\big) = 5{,}25\,g \quad\Longrightarrow\quad a_0 = \frac{3}{8}\,g.$$

Знак: $a_0 > 0$, брусок действительно едет вверх по склону, а шарик вниз вдоль нити, как мы предположили. Для контроля найдём натяжение: $T = mg\cos\beta + ma\sin\beta - ma_0 = \frac{7}{8}mg > 0$ — нить натянута, и $N = 13m(g\cos\alpha + a\sin\alpha) = \frac{63}{4}mg > 0$ — брусок прижат к клину.

Пункт 3.

5. Что движется по вертикали. Клин движется только по горизонтали, поэтому вертикальная скорость и ускорение шарика относительно стола — те же, что относительно клина. Ускорение шарика относительно клина направлено вдоль нити, то есть составляет угол β с вертикалью, и его вертикальная проекция равна $a_0\cos\beta$ (рисунок). Ускорение шарика относительно стола — сумма переносного (клина) и относительного: $\vec{a}_{\text{шар}} = \vec{a} + \vec{a}_0$.



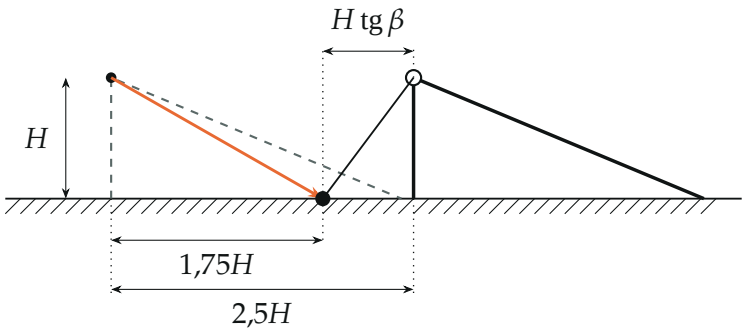
Сложение ускорений: $\vec{a}$ — ускорение клина (горизонтально), $\vec{a}_0$ — шарика относительно клина (вдоль нити, морковная стрелка), $\vec{a}_{шар}$ — относительно стола. Вертикальная составляющая равна $a_0\cos\beta$.

6. Время. В момент начала шарик покоится, и по вертикали он проходит вниз путь H с постоянным ускорением $a_0\cos\beta = \frac{3}{8}g\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{10}g$:

$$H = \frac{a_0\cos\beta}{2}t^2 \quad\Longrightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2H}{a_0\cos\beta}} = \sqrt{\frac{20H}{3g}}.$$

Второй способ: в системе клина шарик проходит вдоль нити путь $H/\cos\beta$ с ускорением a_0: $H/\cos\beta = \frac{1}{2}a_0t^2$ — то же уравнение.

Обратите внимание: в формулу для времени входит не a_0, а его вертикальная проекция $a_0\cos\beta$; брать для вертикали полное a_0 (или горизонтальное a) — ошибка.



Положения системы в начале (серый пунктир) и в конце (сплошная линия) в системе стола. Траектория шарика — прямая (морковная); горизонтальные смещения $1{,}75H$ и $2{,}5H$ отличаются на $H\operatorname{tg}\beta$, как и должно быть при угле нити β.

Проверка. Размерность: ускорения — в долях g, время $\sqrt{H/g}$. Предел: при $a \to 0$ из формулы $a = g\operatorname{tg}\beta$ получаем $\beta \to 0$, шарик висит вертикально, как и должно быть. Независимая проверка положения в конце: за время $t^2 = 20H/(3g)$ клин проедет $\frac{1}{2}at^2 = 2{,}5H$, а шарик по горизонтали сместится на $\frac{1}{2}(a - a_0\sin\beta)t^2 = 1{,}75H$; разность $0{,}75H = H\operatorname{tg}\beta$ — к этому моменту шарик у стола, блок на высоте H над столом, и нить как раз стоит под углом β (рисунок выше). Смысл: шарик падает по прямой наклонной траектории, а клин убегает вперёд быстрее него.

Ответ. 1) $a = \dfrac{3}{4}g$; 2) $a_0 = \dfrac{3}{8}g$; 3) $t = \sqrt{\dfrac{20H}{3g}}$.