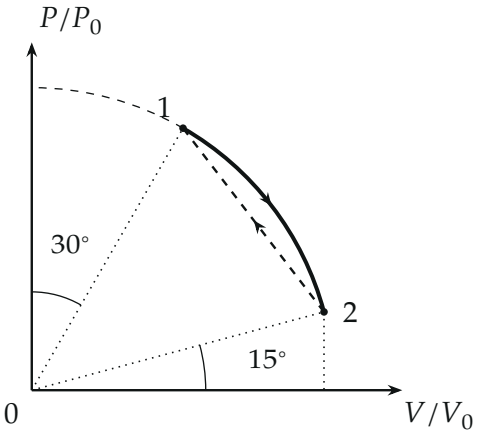
Цикл с расширением по дуге окружности

Задача 2. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 2] С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс. Расширение газа (см. рис.) можно описать графиком в виде дуги окружности 1–2 с центром в начале координат на pV-диаграмме (p_0 и V_0 — некоторые фиксированные давление и объём). Неравновесное сжатие газа 2–1 характеризуется пренебрежимо малым теплообменом с окружающей средой. Радиусы, проведённые в точки 1 и 2, составляют углы 30° и 15° с осями p/p_0 и V/V_0 соответственно.

1. Найдите отношение температур в состояниях 1 и 2.
2. Найдите угол с горизонтальной осью, который составляет радиус, проведённый в точку с теплоёмкостью, равной нулю, в процессе расширения 1–2, если такая точка существует. Дайте значение любой тригонометрической функции угла.
3. Найдите отношение работы газа за цикл к работе газа при расширении.

Ответы можно представить в виде числового выражения, не производя окончательного расчёта «до числа».



▲ **Решение.** **Что происходит.** Идеальный одноатомный газ: $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$. Расширение 1–2 — равновесный процесс, на диаграмме

это дуга, и под ней можно считать работу. Сжатие 2–1 неравновесное, поэтому на диаграмме это не линия (пунктир — условный), а работу на нём мы по площади не считаем; зато известно, что теплообмена нет. Для цикла работа находится из первого начала: $\Delta U_{\text{цикл}} = 0$, поэтому работа за цикл равна полученной теплоте, а при $Q_{21} = 0$ вся она — это теплота Q_{12} на участке 1–2. Дугу удобно описывать углом α радиуса с осью V/V_0.

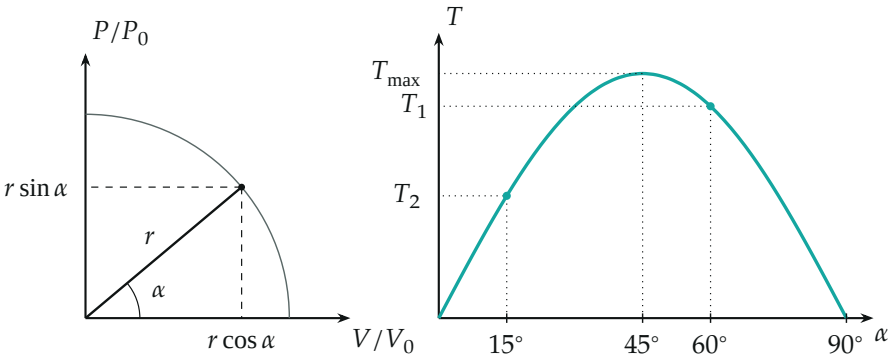
Обозначения. r — радиус окружности в единицах осей, α — угол радиуса, проведённого в точку дуги, с осью V/V_0, поэтому $p = p_0 r \sin\alpha$, $V = V_0 r\cos\alpha$ (в точке 1: $\alpha_1 = 60°$, в точке 2: $\alpha_2 = 15°$); A_{12} — работа газа при расширении, A — работа за цикл.

Пункт 1.

1. Температура на дуге. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$:

$$T = \frac{p_0 V_0\, r^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\nu R} = \frac{p_0 V_0\, r^2}{2\nu R}\,\sin 2\alpha.$$

Значит, $T \propto \sin 2\alpha$: вдоль дуги температура сначала растёт (до $\alpha = 45°$, там максимум), потом падает.



Слева: параметр α и координаты точки дуги. Справа: температура как функция α — пропорциональна $\sin 2\alpha$.

Для точек 1 и 2:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

Знак: $T_1 > T_2$, в результате расширения газ остыл, хотя на середине дуги был горячее обоих концов.

Пункт 2.

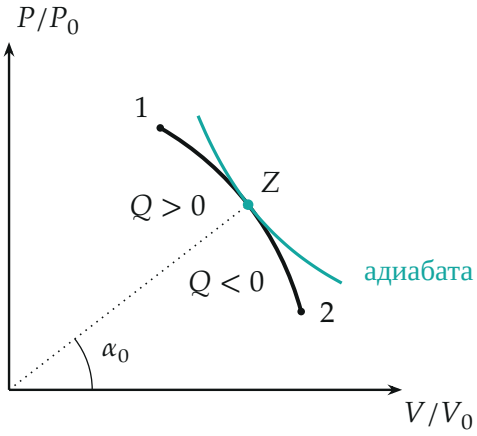
2. Что значит «теплоёмкость равна нулю». Теплоёмкость $C = \dfrac{\Delta Q}{\nu\,\Delta T}$ равна нулю, когда на малом шаге газ не получает и не отдаёт теплоту ($\Delta Q = 0$), хотя температура меняется ($\Delta T \neq 0$): то есть процесс на малом участке идёт как адиабатный. Значит, в искомой точке дуга касается адиабаты — линии с тем же наклоном.

3. Способ 1: наклоны. Наклон дуги найдём из уравнения окружности $V^2 + p^2 = \text{const}$ (в единицах осей): $V\,dV + p\,dp = 0$, поэтому $\dfrac{dp}{dV} = -\dfrac{V}{p} = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Наклон адиабаты с показателем $\gamma = 5/3$ (одноатомный газ), из $pV^\gamma = \text{const}$: $\dfrac{dp}{dV} = -\gamma\dfrac{p}{V} = -\dfrac{5}{3}\operatorname{tg}\alpha$. Приравниваем:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{3}\operatorname{tg}\alpha \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}^2\alpha_0 = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}775, \qquad \alpha_0 \approx 37{,}8^\circ.$$

Угол лежит между 15° и 60°, то есть точка на дуге 1–2 существует.



В точке Z дуга касается адиабаты (бирюзовая). До неё ($1 \to Z$) газ получает теплоту, после ($Z \to 2$) отдаёт.

4. Способ 2: первое начало. Для малого сдвига по дуге на $\Delta\alpha$ (при расширении $\Delta\alpha < 0$): $\Delta U = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p_0V_0r^2\cos 2\alpha\,\Delta\alpha$ и $p\,\Delta V = -p_0V_0r^2\sin^2\alpha\,\Delta\alpha$, откуда

$$\Delta Q = \Delta U + p\,\Delta V = \frac{p_0V_0r^2}{2}\,(3\cos^2\alpha - 5\sin^2\alpha)\,\Delta\alpha.$$

$\Delta Q = 0$ при $\operatorname{tg}^2\alpha = 3/5$ — тот же результат. Так как $\Delta\alpha < 0$, теплота подводится ($\Delta Q > 0$) при $\operatorname{tg}^2\alpha > 3/5$, то есть на участке от точки 1 до точки Z, и отводится дальше до точки 2.

Значения других функций: $\sin\alpha_0 = \sqrt{3/8}$, $\cos\alpha_0 = \sqrt{5/8}$.

Пункт 3.

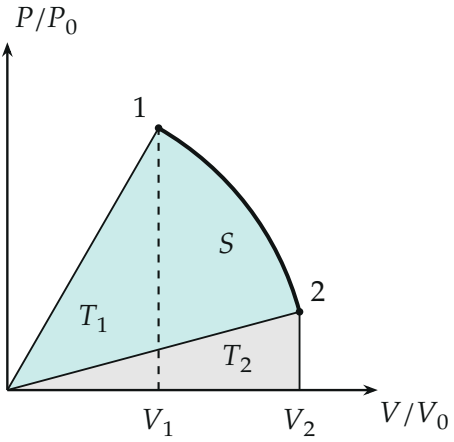
5. Работа расширения. На дуге $p\,dV = -p_0V_0r^2\sin^2\alpha\,d\alpha$ (малый сдвиг по дуге: $dV = -V_0r\sin\alpha\,d\alpha$). Суммируем от точки 1 ($\alpha_1 = 60^\circ$) до точки 2 ($\alpha_2 = 15^\circ$), то есть интегрируем $\sin^2\alpha$ по α от 15° до 60°:

$$A_{12} = p_0V_0r^2\Big[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4}\Big]_{15^\circ}^{60^\circ} = \frac{p_0V_0r^2}{8}\,(\pi + 1 - \sqrt{3}).$$

Второй способ — геометрия: работа равна площади под дугой между V_1 и V_2; она равна площади сектора $O12$ плюс площадь треугольника

$O\,V_2\,2$ минус площадь треугольника $O\,V_1\,1$:

$$A_{12} = p_0 V_0\Big(\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{r^2}{8} - \frac{\sqrt{3}\,r^2}{8}\Big) = \frac{p_0 V_0 r^2}{8}\,(\pi + 1 - \sqrt{3}).$$



Площадь под дугой: $A_{12}/(p_0V_0) = S + T_2 - T_1$. Сектор S — бирюзовый, T_2 — серый треугольник $O\,V_2\,2$, T_1 — треугольник $O\,V_1\,1$ (пунктир), он входит в $S \cup T_2$ и вычитается.

6. Изменение внутренней энергии между состояниями 1 и 2 ($U = \frac{3}{2}pV$, координаты точек — по углам):

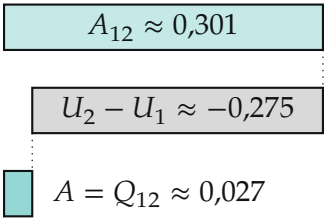
$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \frac{3}{2}\,p_0 V_0 r^2\,(\sin 15^\circ \cos 15^\circ - \sin 60^\circ \cos 60^\circ) \\ &= \frac{3}{4}\,p_0 V_0 r^2\,(\sin 30^\circ - \sin 120^\circ) = \frac{3}{8}\,p_0 V_0 r^2\,(1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Знак: внутренняя энергия уменьшилась ($T_2 < T_1$).

7. Работа за цикл. Запишем первое начало для всего цикла: $\Delta U = 0$, значит, работа за цикл равна суммарной теплоте $A = Q_{12} + Q_{21}$. На участке 2–1 теплообмена нет, $Q_{21} = 0$. Для участка 1–2 то же начало:

$Q_{12} = U_2 - U_1 + A_{12}$. Получаем

$$\frac{A}{A_{12}} = \frac{Q_{12}}{A_{12}} = 1 + \frac{U_2 - U_1}{A_{12}} = 1 + \frac{3(1-\sqrt{3})}{\pi + 1 - \sqrt{3}} = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{3}}{\pi + 1 - \sqrt{3}} \approx 0{,}09.$$



Энергетический баланс в единицах $p_0V_0r^2$: газ совершает работу расширения A_{12}, при этом его внутренняя энергия уменьшается на 0,275, поэтому теплота $Q_{12} = A$ мала.

Обратите внимание: площадь между дугой и хордой 1–2 здесь не равна работе цикла (она составляет $0{,}039\,p_0V_0r^2$, а $A = 0{,}027\,p_0V_0r^2$): сжатие 2–1 неравновесное, давление газа на нём не лежит на хорде, работа в нём найдена не по площади, а из первого начала.

Проверка. Размерность: p_0V_0 — энергия, отношение A/A_{12} безразмерно. Численное интегрирование $\int p\,dV$ по дуге даёт $0{,}3012\,p_0V_0r^2$, а интегрирование ΔQ по дуге — 0,0267 (теплота на $1 \to Z$ равна +0,296, на $Z \to 2$ равна −0,270 в тех же единицах); сумма совпала с A. Смысл: от работы расширения за цикл остаётся около 9 %: расширяясь, газ почти целиком расходует на работу собственную внутреннюю энергию (на $1 \to Z$ теплота подводится, на $Z \to 2$ почти столько же отводится, в сумме Q_{12} мало), а сжатие без теплообмена эту энергию почти целиком возвращает.

Ответ. 1) $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha_0 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ ($\alpha_0 \approx 37{,}8°$); 3) $\dfrac{A}{A_{12}} = \dfrac{\pi + 4 - 4\sqrt{3}}{\pi + 1 - \sqrt{3}} \approx 0{,}09$.