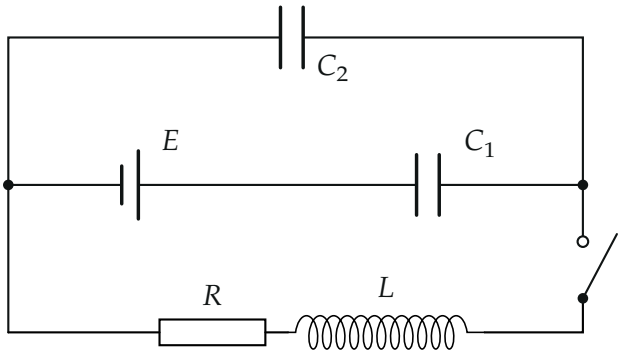
Конденсаторы, катушка и ключ

Задача 3. [Физтех 2020/21, 11 класс, задача 3] Цепь собрана из предварительно незаряженных конденсаторов. Ключ разомкнут, режим установился (см. рис.). Параметры цепи указаны на схеме, причём $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, источник идеальный. Ключ замыкают.

1. Найдите скорость возрастания тока в катушке сразу после замыкания ключа.
2. Какое количество теплоты выделится в цепи после замыкания ключа?
3. Найдите ток в катушке после замыкания ключа в момент, когда ток через C_1 равен I_0.



▲ **Решение.** **Что происходит.** До замыкания источник, C_1 и C_2 образуют один контур, и заряжены оба конденсатора одним зарядом. После замыкания к узлам этого контура подключается ветвь с резистором и катушкой, то есть она оказывается параллельно C_2. Заряды конденсаторов и ток катушки скачком измениться не могут, поэтому в первый момент всё напряжение U_2 на C_2 приложено к катушке: так найдём скорость роста тока. Дальше C_2 разряжается через R и L, а C_1 подзаряжается от источника; в конце токов нет. Энергию найдём из баланса: работа источника идёт в конденсаторы и в тепло. Токи через C_1 и C_2 связаны правилом контура, продифференцированным по времени.

Обозначения. X и Y — левый и правый узлы схемы (между ними включены ветвь E–C_1, конденсатор C_2 и ветвь R–L с ключом). Длинная пластина батареи — положительный полюс. q_0 — заряд каждого конденсатора до замыкания, U_1, U_2 — напряжения на C_1, C_2.

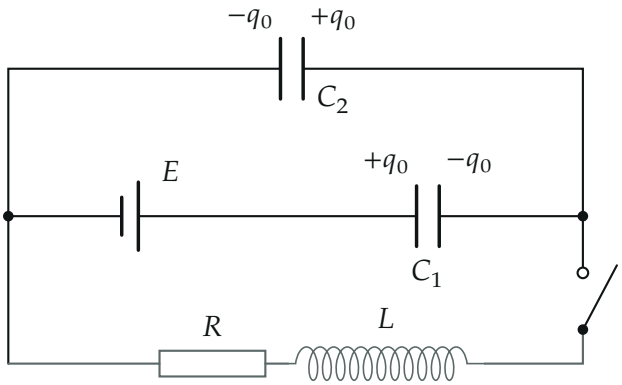
Пункт 1.

1. Состояние до замыкания. Ток через конденсаторы не идёт, поэтому в контуре E–C_1–C_2 нет тока, а конденсаторы, соединённые последовательно, несут одинаковый заряд q_0 (узел Y не заряжен: на нём $-q_0$ от C_1 и $+q_0$ от C_2). Для контура: сумма напряжений равна ЭДС источника:

$$U_1 + U_2 = E, \qquad \frac{q_0}{C_1} + \frac{q_0}{C_2} = E \implies q_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E = \frac{2}{3} CE.$$

Отсюда напряжения на конденсаторах:

$$U_2 = \frac{q_0}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E = \frac{E}{3}, \qquad U_1 = \frac{q_0}{C_1} = \frac{2E}{3}.$$



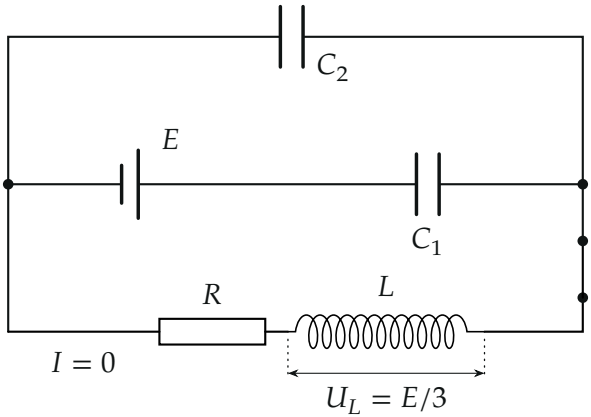
До замыкания ветвь R–L (серая) отключена; заряды одинаковы.

2. Первый момент после замыкания. Заряд конденсатора — интеграл тока по времени, а тока конечной величины за малое время недостаточно для скачка, поэтому q_1, q_2 и напряжения $U_1 = 2E/3$, $U_2 = E/3$ остаются прежними. Ток катушки в этот момент тоже равен нулю (катушка противится быстрому изменению тока), значит, на резисторе

$IR = 0$. Правый узел Y выше левого на U_2, и закон Ома для ветви с катушкой (ЭДС самоиндукции $-L\,dI/dt$):

$$L\frac{dI}{dt} = U_2 - IR = U_2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dI}{dt} = \frac{U_2}{L} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\cdot\frac{E}{L} = \frac{E}{3L}.$$

Знак: производная положительна, ток нарастает от нуля в направлении от Y к X через ключ, катушку и резистор.



Сразу после замыкания: $I = 0$, на катушке всё напряжение $U_2 = E/3$, ток в ней начинает расти.

Пункт 2.

3. Установившийся режим после замыкания. Если токи установились, через конденсаторы они не текут, поэтому ток в катушке равен нулю, на R и L напряжение нулевое, $U_2 = 0$: C_2 полностью разряжен. Тогда контур E–C_1–ветвь RL даёт $U_1 = E$, и заряд C_1 стал $q_1 = C_1E = CE$.

4. Работа источника. Через источник за всё время прошёл заряд, равный изменению заряда C_1: $\Delta q = CE - q_0 = CE/3$. Источник идеальный, значит,

$$A = E\,\Delta q = \frac{CE^2}{3}.$$

5. Энергия конденсаторов. До замыкания (по сумме напряжений

$U_1 + U_2 = E$)

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C_1} + \frac{q_0^2}{2C_2} = \frac{q_0 E}{2} = \frac{CE^2}{3};$$

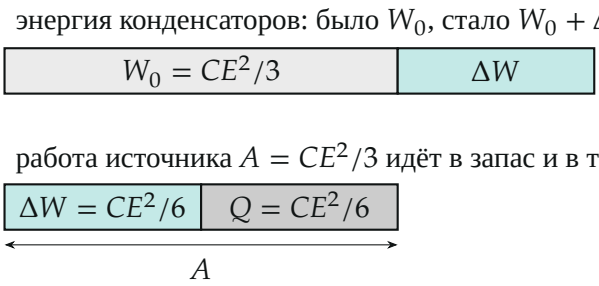
после замыкания заряжен только C_1 до напряжения E: $W_1 = \dfrac{C_1 E^2}{2} = \dfrac{CE^2}{2}$. Энергия катушки в начале и в конце равна нулю, поэтому

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{CE^2}{6}.$$

6. Закон сохранения энергии для всей цепи за время после замыкания: работа источника равна приросту энергии конденсаторов плюс теплота, выделившаяся на R (провода и источник идеальные):

$$A = \Delta W + Q \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{CE^2}{3} - \frac{CE^2}{6} = \frac{CE^2}{6}.$$

Знак: $Q > 0$, как и должно быть.



Половина работы источника запасена в конденсаторах, вторая половина выделилась теплом. Длины пропорциональны энергиям.

Второй способ. Для приращений заряда идеальный источник равен проводу, поэтому относительно ветви RL конденсаторы C_1 и C_2 включены параллельно: общая ёмкость $3C$. Напряжение на них, отсчитанное от конечного значения, вначале равно $U_2 = E/3$, в конце — нулю. Эта «батарея» разряжается через RL; в конце тока нет, значит, вся её энергия ушла в теплоту на R: $Q = \frac{1}{2} \cdot 3C \cdot (E/3)^2 = CE^2/6$ — то же число.

Пункт 3.

7. Связь токов. В произвольный момент после замыкания пусть q_1 — заряд левой обкладки C_1, q_2 — заряд правой обкладки C_2, $I_1 = dq_1/dt$ — ток через C_1 (в сторону правого узла), $I_2 = -dq_2/dt$ — ток через C_2 (в ту же сторону: C_2 разряжается). Сумма напряжений вокруг контура E–C_1–C_2 по-прежнему равна E (ветвь RL в этот контур не входит):

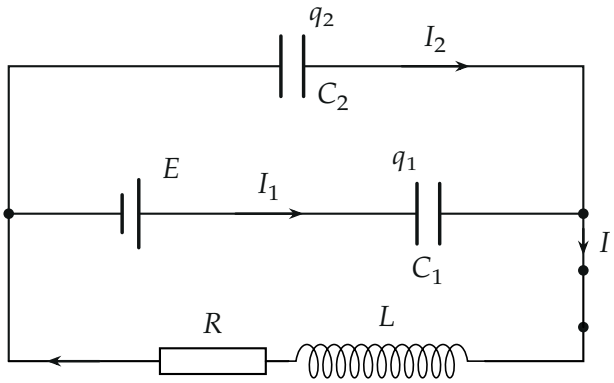
$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = E.$$

Продифференцируем по времени (ЭДС постоянна):

$$\frac{I_1}{C_1} - \frac{I_2}{C_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_2 = \frac{C_2}{C_1} I_1 = 2I_1.$$

В правом узле токи I_1 и I_2 сходятся и уходят через ключ в катушку (закон сохранения заряда для узла Y):

$$I = I_1 + I_2.$$



Произвольный момент после замыкания: токи I_1 и I_2 текут к правому узлу, ток катушки $I = I_1 + I_2$.

8. Результат. При $I_1 = I_0$ имеем $I_2 = 2I_0$ и ток в катушке

$$I = I_1 + I_2 = 3I_0.$$

Обратите внимание: ток в катушке не равен току через C_1 — он равен сумме токов через оба конденсатора. Отношение $I : I_1 = (C_1 + C_2) : C_1$ не зависит от R и L и верно в любой момент.

Проверка. Размерность: CE^2 — джоуль, E/L — ампер в секунду. Численный расчёт контура R–L–конденсаторы при разных R даёт $Q = CE^2/6$ и $dI/dt = E/(3L)$ при $t = 0$. Предельные случаи: при $C_2 \to \infty$ напряжение $U_2 = EC_1/(C_1 + C_2) \to 0$, и скорость роста тока, и теплота стремятся к нулю — ветвь RL подключена к закороченному C_2; при $C_2 \to 0$ получаем $U_2 = E$, $dI/dt = E/L$ и $Q = \frac{1}{2}C_1E^2$ — классическая зарядка C_1 через R, когда половина работы источника идёт в тепло. Смысл: источник совершил работу $CE^2/3$, из которой половина превратилась в тепло.

Ответ. 1) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{E}{3L}$; 2) $Q = \dfrac{CE^2}{6}$; 3) $I = 3I_0$.